E.M. nº 72 Septiembre-Diciembre 2022

Encuentros Multidisciplinares

LA REVOLUCIÓN CONCEPTUAL. UNA APROXIMACIÓN DESDE ALEXANDRE GROTHENDIECK

Domingo Fernández Agis
Catedrático de Universidad
Facultad de Humanidades. Universidad de La Laguna

RESUMEN

En este trabajo pretendo exponer y analizar los presupuestos y proyecciones directamente implicados en toda revolución conceptual. Para lograr tales objetivos tomaré como punto de partida algunas de las aportaciones intelectuales de Alexandre Grothendieck, a quien no sólo debemos admirar por las importantes innovaciones que realizó en matemáticas pues, como mostraré en mi exposición, igualmente merecen un gran reconocimiento sus contribuciones a la epistemología y a la filosofía de la ciencia. Por todo ello, queda claro que es acertado tomar su obra como modelo de revolución conceptual.

"*La ciencia se niega a dar la respuesta desacreditando la pregunta, es decir, tachándola de absurda. Porque sólo tiene sentido para ella lo que se ajusta a su método de hallazgo y examen de la verdad*".
(Gadamer, 1992: 52)

1. INTRODUCCIÓN

Nos adentraremos en este ensayo en la interminable aventura que conlleva la revolución conceptual. Para ello tomaremos como punto de partida algunas aportaciones sustanciales realizadas por Alexandre Grothendieck, a quien no sólo debemos admirar por sus grandes innovaciones en las matemáticas. También merecen un gran reconocimiento y una divulgación cargada de elogios sus contribuciones a la epistemología y a la filosofía de la ciencia.

Por lo demás, deberíamos tener presente que la dificultad de pensar proviene a menudo de la incapacidad de mirar en la dirección de lo que se considera impensable.

Detrás de lo que sucede, de lo que en nuestro afán definitorio llamamos *Mundo*, no hay una conciencia decisoria, sino una materialidad decidente. Comprender que eres parte de esa materialidad es el paso decisivo que hemos de dar para abrirnos al ámbito en el que es posible una limitada comprensión de lo que acaece.

Identificamos el suceso con lo que, desde nuestra percepción y a nuestro juicio, consideramos que ha acaecido. Por ello, cuestionar tal identificación parece absurdo. Sin embargo, captar el sentido de un suceso no es igual que llegar a comprender lo que sucede, ya que esto último trasciende con amplitud lo que evidencialmente acaece y es perceptible como suceso.

Lo que llamamos suceso es un acaecer limitado por la mente que lo percibe y que intenta construir una descripción de lo acaecido fuera de sí misma, al tiempo que barema el impacto que ello ha tenido en el interior de sí. Es difícil gestionar intelectualmente el acontecer del acaecer.

2. PASOS HACIA LA INNOVACIÓN

Se habla con frecuencia de la intuición como base de un pensamiento espontáneo y libre, pero también es frecuente que se vea cuestionada su funcionalidad. Sin embargo, en realidad, no hay nada de ello cuya apertura sea viable al margen de la intuición. La esencia de la racionalidad no ha de buscarse en inamovibles estructuras, sino en el impulso que hace posible la emergencia de una original configuración racional con constatable potencialidad explicativa y éste es la intuición.

Mi propósito era y es, experimentar conmigo mismo, explorar otras dimensiones, sabiendo que gran número de ellas se encuentran en el interior del ser humano. Cuando me equivoco, lo reconozco y me apena haber causado pesar, en mí y en otras personas, al cometer el error que cometí. Hay errores de los que nada se aprende. Son aquellos que uno no está dispuesto a reconocer ni a rectificar. Hay que reconocer como tales los errores que se cometen, para rectificar y rectificarse.

Puede resultar elocuente evocar que los bebés habitualmente intentan probarlo todo, desean conocer su entorno sumergiéndose en él. Así fuimos, pero muy positivo será apostar porque así seamos durante toda nuestra vida. A pesar de todo lo que creo que es fundamento de lo existente o que considero como tal, es necesario alimentar el impulso a percibir lo no percibido para apostar con libertad por la libertad. El uso adecuado de la inteligencia natural es esencial para abrir los caminos de la libertad. No obstante, en la actualidad es mucho lo que la inteligencia artificial puede aportar como ayuda para ello, aunque lamentablemente no siempre se hace un uso honesto de la misma.

El algoritmo de Alan Turing, cuya enunciación supuso un momento clave en el desarrollo de la IA, se basa en la inferencia estadística secuencial. Ha servido además de base, no sólo para el despliegue de la IA sino también de la propia estadística secuencial. En líneas generales, habría que recordar que, según Gustav Theodor Fechner, quien es considerado como el creador de la Psicofísica, el cerebro funciona de forma secuencial. En este sentido, para hallar soluciones vinculadas a los problemas que plantea la relación entre mente y materia, aplica un modelo de acumulación estocástica de datos. Se trata de una inferencia estadística secuencial que, por ejemplo, permite interpretar la relación entre estímulos y sensaciones.

La argumentación estocástica refuerza la intuición o la encierra en el trasfondo oscuro del que nunca debería haberse separado. El suceso sólo es tal cuando emerge en el encuadre adecuado. La interpretación no parte de una pregunta. Su punto de partida real es un número significativo de respuestas. Si no sabes decir qué te interpela, ¿cómo vas a saber qué responder?

Las razones no siempre son reconocidas como tales. Se diría que sucede más bien lo contrario y que lo que llamamos razones no merece muchas veces tal calificativo, al carecer de un fundamento que evidencie la conexión de lo racional y lo real.

Para abundar y profundizar en la reflexión sobre todos estos aspectos considero que son esenciales las aportaciones realizadas por René Thom, en especial a través de su Teoría de las catástrofes, para cuyo conocimiento y comprensión resulta esencial la lectura de su obra *Stabilité structurelle et morphogènese* (Thom, 1972). Refiriéndose a su aspecto esencial, Alexander Woodcock y Monte Davis señalan que "*la teoría es polémica porque propone que las matemáticas que han fundamentado trescientos años de ciencia, aunque han sido poderosas y han tenido éxito, han fomentado una concepción parcial del cambio. Esos principios matemáticos son idealmente adecuados para analizar -porque fueron creados para analizar- el cambio suave, continuo, cuantitativo, los cursos suavemente curvados de los planetas alrededor del Sol, la presión continuamente cambiante de un gas mientras se calienta y se enfría, el aumento cuantitativo del nivel de una hormona en el flujo sanguíneo. Pero hay otro tipo de cambio*" (Woodcock - Davis, 1986: 13-14).

En efecto, la teoría de las catástrofes nos permite analizar profundamente y exponer en clave matemática las raíces de los cambios que conllevan una drástica ruptura de la continuidad y un salto hacia un punto en el que surge una novedad radical.

Si hablamos de la vida humana podemos afirmar que, asumiendo lo que conlleva el cambio de perspectiva que la teoría de las catástrofes aporta, hemos de considerar que el primer paso hacia la innovación es el más importante, cuando sabes a dónde puedes llegar, o al menos intuyes la existencia de un lugar al que por nada del mundo desearías renunciar. Pero a menudo no lo sabes y, aunque intuyas la realidad de algo que distorsiona el sentido de tus presupuestos vitales, quieres permanecer en una plácida convivencia con quien crees ser. Desde una perspectiva general, podríamos decir que el ámbito que te rodea se repliega constantemente sobre sí mismo para aplastarte, pero, en tu ingenuidad, te afanas en pensar que lo hace para ofrecerte abrigo y cobijo.

3. SEMBRAR Y RECOLECTAR

En la extraordinaria obra de Alexandre Grothendieck, *Recoltes et semailles. Réflexions et témoignages sur un passé de mathématicien,* a la que, pese a haber quedado inédita, es posible acceder a través de los archivos de la Université des Sciences et Techniques du Languedoc (Montpellier) así como por medio del Centre National de la Recherche Scientifique, podemos encontrar sustanciales aportaciones centradas en los espacios conceptuales en los que nos queremos adentrar. A continuación, ofreceré mis reflexiones a partir de algunos fragmentos esenciales de dicha obra, cuya traducción he realizado con suma entrega y placentera dedicación.

En una nota a pie de página hace una aclaración referida a cómo, siguiendo las aportaciones de H. Cartan et J. P. Serre, ha sido "*uno de los principales utilizadores y promotores de una de las grandes nociones innovadoras introducidas por Leray, la de haz, la cual ha sido uno de los útiles esenciales a través de toda mi obra de geómetra. Es también la que me ha proporcionado la clave para la ampliación de la noción de espacio (topológico) en la de topos*" (Grothendieck,1985: 13). Como sabemos, la noción de *haz* se refiere a la unión sistemática de elementos intrínsecamente relacionados.

Relata con detalle en su gran obra inédita, cómo durante muchos años se adentró creativamente en el ámbito de los estudios de geometría, partiendo de tal presupuesto. Señala que a lo largo de esos años, "*la casi totalidad de mi tiempo y de mi energía estaba consagrada a lo que se denomina 'trabajo sobre elementos': o minucioso trabajo de configuración, de unión y de rodaje, requerido para la construcción de todas las habitaciones de las casas que una voz (o un demonio…) interior me comprometía a construir, según una obra maestra que me inspiraba a medida que el trabajo avanzaba*" (Grothendieck,1985: 17).

Es admirable este enfoque, que tan sólo han asumido quienes más radicales aportaciones han realizado a las matemáticas, consistente en abordar la tarea de la revisión completa de los resultados obtenidos a lo largo del desarrollo de esta ciencia, buscando en última instancia una refundamentación de la misma que la convierta en el lugar ideal para habitar intelectualmente.

Analizando de forma crítica los logros epistemológicos que alcanzó, señala que "*lo mejor que yo he aportado en matemáticas son los 'puntos de vista' novedosos que he sabido entrever de antemano y, a continuación, desenredar pacientemente y desarrollar más o menos…*" (Grothendieck,1985: 19).

En efecto, en un ámbito que se considera enormemente trabajado y que ciertamente lo es, ser capaz de aportar puntos de vista originales tiene un mérito excepcional.

En la primera nota a pie de página que se encuentra en la página 21, se recoge lo que Grothendieck considera las "*doce ideas matrices*" y "*los temas clave*" de su obra. Los dos temas clave a los que alude serían estos dos: "*Esquemas*" y "*Topos*" (Grothendieck,1985: 21).

A primera vista es difícil hacerse a la idea de las posibilidades que ambos encierran para el desarrollo de un pensamiento original, pues los términos que los denotan nos hacen pensar en cuestiones archiconocidas. No obstante, profundizando en el asunto, en la segunda nota a pie de página que se encuentra en la página 21, añade que "*entre estos temas, el más grande, por su impacto, me parece que es el de los topos, que proporciona la idea de una síntesis de la geometría algebraica, de la topología y de la aritmética*" (Grothendieck,1985: 21).

En efecto, un singular punto de conexión es también un fundamento para el desarrollo de una inherente potencialidad. Son precisamente este tipo de detalles los que con más claridad nos revelan el gran poder de impulsar una revolución conceptual que encierran los planteamientos de Grothendieck.

En la página 22, en la continuación de la segunda nota a pie de página que se encuentra en la página 21, recoge una importante aseveración, que viene a dejar claro cuáles son a su juicio, entre los doce temas que ha destacado, los que tienen un mayor calado y proyección. Afirma, en concreto, que "*los más profundos (desde mi punto de vista) entre estos doce temas, son el de motivos y el estrechamente ligado a él, de geometría algebraica anabeliana y el de yoga de Galois-Teichmüller*" (Grothendieck,1985: 22).

En el fondo, la elección de esos temas está vinculada al descubrimiento de la profunda conexión que hay entre ellos. Descubrir tal conexión y apoyarse en ella para determinar y exponer nuevos planteamientos epistemológicos es algo merecedor de los más grandes elogios.

Otra cuestión esencial a la que hace una detenida y brillante referencia es que "*tradicionalmente se distinguen tres tipos de 'cualidades' o de 'aspectos' de las cosas del Universo, que sean objeto de la reflexión matemática: son el número, el tamaño y la forma. También se les puede llamar el aspecto 'aritmético', el aspecto 'métrico' (o 'analítico'), y el aspecto 'geométrico' de las cosas. En la mayor parte de las situaciones estudiadas en matemáticas, estos tres aspectos están presentes simultáneamente y en estrecha relación. Sin embargo, lo más frecuente es que se produzca un predominio muy marcado de uno de los tres*" (Grothendieck,1985: 25-26).

En efecto, las dificultades inherentes al estudio conjunto de esos tres aspectos, conllevan la forzada elección de uno de ellos y la exclusión pragmática de los otros dos en la mayoría de los casos.

La originalidad de su enfoque y la enorme potencialidad de su singular aproximación a la investigación matemática queda bastante aclarada a través de este fascinante fragmento de su vibrante exposición:

"*Es decir, que si hay una cosa en matemáticas que (desde siempre sin duda) me fascina más que ninguna otra, no es ni "el número", ni "la amplitud", sino siempre la forma. Y en medio de los mil y un rostros que elige la forma para revelarse a nosotros, el que me ha fascinado más que ninguno y continúa fascinándome es la estructura oculta en las cosas matemáticas.*

La estructura de una cosa no es en absoluto algo que nosotros podamos 'inventar'. Podemos solamente ponerla al día pacientemente, humildemente, haciendo conocimiento, 'descubrirla'. Si hay inventividad en este trabajo y si llegamos a actuar como herrero o constructor incansable, esto no es en absoluto para 'configurar', o para 'construir', 'estructuras'" (Grothendieck,1985: 27).

A continuación, señala Grothendieck que "*de esta forma estamos impulsados constantemente a 'inventar' el leguaje adecuado para expresar cada vez más este lenguaje, poco a poco y de todos los elementos, las 'teorías' que son consideradas aptas para rendir cuenta de lo que ha sido captado y visto. Hay ahí un movimiento de ida y vuelta continua, ininterrumpido, entre la aprehensión de las cosas, y la expresión de lo que se aprende, por un lenguaje que se afina y se recrea al final del trabajo, bajo la constante presión de la necesidad inmediata*" (Grothendieck,1985: 27).

Ciertamente, el análisis matemático de la forma ha sido y será siempre un gran reto. Sin duda merece ser elogiado tanto el empeño de lograrlo como el resultado obtenido en cada caso, aunque éste no resulte inamovible. En efecto, el dinamismo epistémico en este ámbito resulta a veces estremecedor.

Analizando de manera singular la relación entre la aritmética y la geometría, concluye que "*así la aritmética aparece (grosso-modo) como la ciencia de las estructuras discretas, y el análisis como la ciencia de las estructuras continuas.*

En cuanto a la geometría, puede decirse que desde hace más de dos mil años existe bajo la forma de una ciencia en el sentido moderno de la palabra, está 'a caballo' sobre estos dos tipos de estructuras, las 'discretas' y las 'continuas'" (Grothendieck,1985: 28-9).

Es evidente que es un gran reto intelectual tratar de encontrar puntos de conexión y zonas de equilibrio entre ambos tipos de estructuras.

Para entender la originalidad de su enfoque, es particularmente importante tener claro cómo considera que "*las dos ideas-fuerzas cruciales en el arranque y en el desarrollo de la nueva geometría, han sido la de esquema y la de topos*" (Grothendieck,1985: 31).

Asumir un reto como éste conlleva un proceloso acto de valentía intelectual. Él intuía desde el primer momento lo mucho que podía lograr, pero también era consciente de la dureza del combate que tendría que afrontar.

Por otra parte, resulta imprescindible comprender el calado que tiene su concepción del esquema. En tal sentido hay que tener en cuenta que para él "*la noción de esquema es la más natural, la más 'evidente' imaginable, para englobar en una única noción la serie infinita de nociones de "variedad" (algebraica) que se manejaban anteriormente*" (Grothendieck,1985: 32).

En otros términos, podemos insistir en que, a través de la noción de esquema, Grothendieck pretende encontrar el camino adecuado para lograr la más profunda conexión entre aritmética y geometría. Tal esquema ha de fundamentarse y aplicarse desde sólidos presupuestos aritméticos. Esto le proporciona una inédita consistencia y una gran potencialidad en lo que respecta a sus posibles aplicaciones.

Una sugerente y apasionante alusión a la creatividad epistémica nos la ofrece al afirmar que "*en nuestro conocimiento de las cosas del Universo (sean ellas matemáticas o no), nuestro poder renovador no es otro que la inocencia. Es la inocencia original que todos nosotros hemos recibido en parte en nuestro nacimiento y que reposa en cada uno de nosotros. A menudo objeto de nuestro desprecio y de nuestros miedos más secretos. Tan sólo ella une la humildad y la audacia que nos hacen penetrar en el corazón de las cosas, y que nos permiten dejar que las cosas penetren en nosotros y nos impregnen*" (Grothendieck,1985: 33).

En el sentido en que él hace uso de esta expresión, la inocencia conlleva una actitud de apertura intelectual, que es la más profunda que a lo largo de toda nuestra vida podemos lograr. En este sentido, la inocencia nada tiene que ver con la ingenuidad sino con la más sutil y osada aproximación a la sabiduría.

Por lo demás, abundando en uno de los aspectos clave a los que nos hemos referido al aludir a la originalidad de sus aportaciones, señala que "*la idea innovadora del 'esquema', como acabamos de ver, es la que permite unir entre ellas las diferentes 'geometrías' asociadas a los diferentes números primero (o diferentes características). Estas geometrías, sin embargo, dejaban aún alguna de naturaleza esencialmente 'discreta' o 'discontinua', en contacto con la geometría tradicional aportada por los siglos pasados (y remontándose a Euclides). Las nuevas ideas introducidas por Zariski y por Serre restituían en cierta medida, para estas geometrías, una 'dimensión' de continuidad, heredada de inmediato por la 'geometría esquemática', que acababa de aparecer con la finalidad de unirlas*"

(Grothendieck,1985: 33-34).

Así pues, se trataría de restituir la continuidad a través del reconocimiento de la discontinuidad. Esto, que puede parecer paradójico, encierra sin embargo en sí una profunda aceptación de la complejidad de lo real.

En definitiva, para él "*la noción de esquema constituye una enorme ampliación de la noción de 'variedad algebraica', y a este título ha renovado de arriba abajo la geometría algebraica legada por mis antecesores. La de topos constituye una extensión insospechada, o por decirlo mejor, una metamorfosis de la noción de espacio. Por ello aporta la promesa de una renovación semejante de la topología y, más allá de ésta, de la geometría*" (Grothendieck,1985: 40).

Así pues, en contra de lo que suele ser habitual, la noción de esquema conlleva, impulsa e implica un compromiso intelectual de aceptación de la variedad. En definitiva, en lugar de una obcecada negación, conlleva una osada apuesta por el reconocimiento de la diferencia.

4. CONCLUSIÓN: LO NUMÉRICO Y LO FACTORIAL

Para configurar con adecuada sutileza las conclusiones de este breve ensayo, no está de más evocar las clarificadoras alusiones de Montesquieu que recojo a continuación:

"*He aquí, prosiguió él, los oradores, que tienen el talento de persuadir independientemente de las razones; y los geómetras, que obligan a un hombre, a pesar suyo, a quedar persuadido y lo convencen con tiranía*" (Montesquieu, 1934: 50).

La prevalencia históricamente otorgada a lo aritmético es el factor implícito en esa "tiranía" conceptualmente impositiva de la que en el fondo habla Montesquieu. Abundando en ello, he de decir que bien sé que no digo nada extraño al evocar que, desde mi más tierna infancia, saboteando mi personal inclinación, me han inducido a dar prioridad a lo numérico sobre lo factorial. Sin embargo, como ya he sugerido a lo largo de estas páginas, siempre he considerado lo factorial como aspecto eternamente merecedor de atención prioritaria y en ello coincido con las sutiles apreciaciones de Alexandre Grothendieck.

Unas palabras de María Zambrano nos permiten enriquecer la exposición de las ideas que hemos de destacar como conclusión de este trabajo. Nos dice esta admirable pensadora que "*centellean en la noche del ser, a través de la claridad de la conciencia que no la disipa, signos, signos del reino de la matemática, y figuras también de otros reinos, del reino de lo sacro o que a serio tiende, principalmente. Llaman, amenazando convertirse en obsesiones, a ser descifrados, se imponen como estaciones a recorrer, como pasos que hay que dar fuera o más allá del camino de aquel que se lo haya trazado de antemano, con su sola, escuálida razón. Rondan y revolotean estos signos en las figuras del arte y en las del que ve visiones. Muchas de ellas fantasmas de algo, ser o suceso, percibido realmente en la vida cotidiana, percibidas realmente, mas no verdaderamente. Y su imagen visionaria persigue así como la verdad inadvertida, como la razón dejada en los aires*" (Zambrano,1986: 34).

5. BIBLIOGRAFÍA

GADAMER, H. G. (1992), *Verdad y método*, Vol. II, Salamanca, Sígueme.
GROTHENDIECK, A. (1985), *Récoltes et semailles. Réflexions et témoinages sur un passé de mathématicien*, Montpellier, Université des Sciences et Techniques du Langedoc.
MONTESQUIEU (1934), *Lettres persanes*, Montesquieu, *Pages choisies* I, Paris, Larousse.
THOM, R. (1972), *Stabilité structurelle et morphogènese*, Paris, Ediscience.
WOODCOCK, A.; DAVIS, M. (1986), *Teoría de las catástrofes*, Madrid, Ediciones Cátedra.
ZAMBRANO, M. (1986), *Claros del bosque*, Barcelona, Seix Barral.