LAS MATEMÁTICAS Y SUS APLICACIONES, AYER Y HOY. RETOS DEL FUTURO

Juan Luis Vázquez Suárez
Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid
Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales

RESUMEN

Los científicos han sabido desde hace siglos que las matemáticas forman, junto con el método experimental, el esquema conceptual en que se basa la ciencia moderna y en el que se apoya la tecnología. En la presente sociedad de la información, el esquema se ha ampliado y está formado por experimentos, matemáticas y computación. Tras siglos de vivir una vida más o menos discreta, parece que con el último siglo ha llegado la edad de oro: nadie duda hoy día de la importancia de las matemáticas en la educación, en la ciencia, en la industria, y también en las más variadas actividades sociales, como son los mundos de la economía y las finanzas, la ecología, la climatología, la medicina, o el fascinante mundo de la imagen.

INTRODUCCIÓN

Las matemáticas tienen la reputación de materia difícil y la investigación matemática ha sido y es aún considerada por muchos como una "abstracción sublime pero alejada de la vida práctica". Las matemáticas son respetadas en la educación elemental en su rama utilitaria (es decir, saber las cuentas, fracciones, un poco de álgebra y la geometría básica), en la educación media como vehículo de un tipo de razonar que procede con lógica infalible, y son usadas en algunas enseñanzas superiores como filtro de entrada; sin embargo, una gran parte de la población ha vivido hasta hace poco al margen o contra sus encantos, y no es infrecuente la orgullosa aseveración del humanista anumérico típico que confiesa no saber nada de ellas y no querer saberlo[1]. Mala suerte para tales personas, pues la vida ha cambiado recientemente en forma acelerada y las matemáticas están por todas partes en el mundo de la técnica y la información en que nos ha tocado vivir. Están en general detrás de la ciencia y la tecnología, poco visibles, pero están. Útil será pues construir puentes que unan a las matemáticas, la ciencia y la cultura.

Entremos en materia. Las matemáticas han tenido siempre dos caras, la aplicada o utilitaria, y la pura o intelectual. Esa dualidad es a veces incómoda[2] y no ha sido siempre bien llevada por los profesionales, pero está en la esencia de las cosas, es así, lo queramos o no. Ahora bien, conviene no asustarse antes de tiempo: el edificio de la ciencia matemática es único (hacemos un gran esfuerzo porque sea así) aunque tiene vistas al exterior en muchas direcciones. La transición entre ambos aspectos es a veces sutil, pero quien vive la profesión cultivando ambas facetas no tiene ninguna duda de cuál es cuál y de que la ciencia que hay detrás es la misma, aunque una charla en un congreso de matemáticas puede parecerse poco o nada a un informe sobre el proyecto de aplicación de un modelo matemático a una rama de la ciencia, la ingeniería o la economía. Dejémoslo claro, en el centro del edificio no se distinguen las ventanas, para quien vive en el centro las matemáticas son sólo matemáticas, se usen o no; el profesional distingue primero entre matemáticas buenas o malas, lo de si son útiles o no lo decidirán tanto el interés de los científicos vecinos como el futuro inescrutable.

LAS MATEMÁTICAS DEL PASADO

El aspecto práctico de las matemáticas, como contar, crear un sistema de numeración, las operaciones aritméticas, y los elementos de la geometría, ocupó a todas las culturas que se han ido

[1] Actitud pintoresca, que hoy día se ve acompañada por la del que se niega a aprender nada del mundo informático.
[2] Dirá el lector, un engorro más ¡ahora resulta que hay dos clases!

formando desde los albores de la humanidad y es un buen test del progreso mental de las culturas primitivas saber hasta dónde han/habían llegado en estos menesteres; ha habido culturas que se contentaron con contar: uno, dos, tres y muchos, mientras que sólo se llegó al concepto de infinito en culturas muy avanzadas[3]. Pero las grandes culturas de la antigüedad (sumerios, babilonios, egipcios, indios o chinos) ya vieron que tras estas operaciones prácticas se escondía un mundo intelectual de propiedades sorprendentes, que dieron lugar al arte de la aritmética y la geometría y nos legaron, en forma ciertamente indirecta y poco rigurosa, un tesoro de saberes. Este tesoro lo ejemplifica el "teorema de Pitágoras que era conocido miles de años antes de Pitágoras de Samos en la forma: $3^2+4^2=5^2,\ 12^2+5^2=13^2,$ ..., y es una de las joyas matemáticas más antiguas y repartidas de la humanidad. Los antiguos tropezaron con las dificultades técnicas de la profesión, por ejemplo se les atragantaron las fracciones y no digamos las raíces, pero los babilonios eran ya grandes astrónomos y los egipcios geómetras, a pesar de ello.

El genio de la cultura griega construyó sobre estos materiales milenarios un mundo de abstracción intelectual que es el que hoy conocemos, con las disciplinas de la Aritmética, la Geometría y unas incipientes Algebra y Astronomía; es un edificio extraído sin duda de la experiencia del mundo diario, pero idealizado[4] y asentado en la lógica deductiva. El ejemplo de los "Elementos de Euclides", libro que se lee sin dificultad y sin necesidad de actualización más de dos mil años después de ser escrito, indica el sorprendente nivel de la cultura que floreció en las orillas del Egeo entre los siglos VII y IV antes de nuestra era para extenderse luego por el Oriente y tener su faro en la Alejandría de los Ptolomeos. ¿Tuvieron esas matemáticas de alto nivel intelectual un punto de contacto con el mundo práctico? Hubo genios en la aplicación a la astronomía o la mecánica, como el gran Arquímedes de Siracusa, pero la matemática aplicada no fue el punto fuerte del legado griego a la cultura.

NEWTON Y LA REVOLUCIÓN DEL CÁLCULO

Tras más de un milenio de casi olvido (en Occidente), un nuevo período de auge de las matemáticas sucede en el Renacimiento europeo y tiene su momento estelar en la invención del Cálculo por Isaac Newton y Gottfried Leibniz a finales del siglo XVII. Era el momento en que arrancaba la Ciencia en Europa[5]. Tras este invento genial, el científico tiene a su disposición un instrumento de alta precisión basado en conceptos difíciles pero espectacularmente eficientes: el cálculo de derivadas; el cálculo de integrales, inverso del anterior; las series infinitas; las ecuaciones diferenciales. Con este bagaje Newton escribe la ecuación diferencial que codifica la ley universal de atracción de los cuerpos, que en su enorme sencillez dice que todos los cuerpos dotados de masa se atraen con una fuerza que es proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de su distancia.

Tras estas impresionantes contribuciones, Isaac Newton pasó a presidir el olimpo de las personas más inteligentes que en el mundo han sido y lo sigue presidiendo como uno de los humanos más influyentes en moldear el futuro[6]. De hecho, Newton propuso explicar el movimiento observado de los cuerpos celestes mediante un *modelo matemático,* a saber la ley de la gravitación universal, ley única para todos los fenómenos, y expresada en términos de los conceptos abstractos del naciente cálculo. El éxito de tal propuesta es abrumador, cualquier estudiante de cualquier materia científica lo sabe hoy día. Se pone así en evidencia de la manera más brillante *la capacidad de la mente humana para descubrir los secretos de la Naturaleza*[7], y, como había dicho Galileo Galilei, *esos secretos están resguardados de la vista común por su clave matemática.*

[3] Que invitamos al lector a descubrir como ejercicio de lectura, internet es una buena opción.
[4] Por así decirlo, un mundo platónico.
[5] Siglo de auge de la ciencia y al tiempo de despegue de varias de las naciones europeas, pero de infausta memoria para nuestro país por tantas razones, aparte de la literatura. Leer el Lazarillo da dolor.
[6] No estamos hablando de la sabiduría moral, Newton no compite en el terreno de Lao Tse, Buda, Jesús,…
[7] Cuánto no daríamos por una ley de Newton en las ciencias sociales.

En los dos siglos que siguen a estos hechos tiene lugar en las naciones avanzadas de Europa el desarrollo espectacular de la Ciencia clásica que hoy conocemos, con sus disciplinas tradicionales de Física, Química, Biología y Geología. La primera de estas ciencias está profundamente influida por el aparato matemático, que forma junto con el aparato experimental la base de su proceder. Los estudios de Mecánica tienen un éxito tan espectacular que a finales del siglo XVIII se puede contemplar el grandioso edificio intelectual de la mecánica lagrangiana, mientras Laplace escribe la mecánica celeste y Euler nos lega la mecánica de fluidos. Estos son éxitos impresionantes de las matemáticas del más alto nivel aplicadas a la fundamentación de la "nueva física", que deja por fin atrás a Aristóteles y prepara el mundo tecnológico que hoy vivimos.

Pero en paralelo sucede una batalla distinta, un juego más bajo de la superficie: los matemáticos han de dedicar una parte sustancial de su tiempo (hablo como colectivo) a mejorar sus instrumentos. El desarrollo del arte del Cálculo no es ni fácil ni de pequeña extensión, las mejores mentes emplean esfuerzos ingentes en comprender las propiedades de las funciones diferenciables, en comprender el cálculo de integrales, hallan jardines intelectuales fabulosos como la teoría de funciones de variable compleja, investigan el cálculo de mínimos de funcionales que les lega la mecánica lagrangiana, y se ocupan de escribir la geometría con el nuevo código (geometría diferencial).

Podríamos pensar que la tensión entre los dos mundos, el de los orientados a la naturaleza y el de los orientados a los fundamentos, puede dar lugar a una triste separación. El peligro existe pero se salva por una feliz conjunción: ambas tendencias son llevadas a cabo por las mismas personas, gigantes en ambos campos. Mentes fabulosas sueldan las dos alas, como los citados Leonard Euler, Joseph Louis Lagrange, Pierre Simon de Laplace,... vemos un futuro brillante *a hombros de gigantes.*

EL SIGLO XIX. EL EJEMPLO DE MAXWELL

El deslumbrante nuevo siglo nos lega nuevos saberes científicos, como la electricidad y el magnetismo, la teoría del calor y ondas, las geometrías no euclídeas que dan paso pronto a la posibilidad de comprender la existencia de espacios curvados en formas generales en cualquier número de dimensiones (geometrías de Riemann), la teoría de funciones con sus hitos en forma de serie de Fourier y transformada de Fourier. La comunidad matemática se multiplica con la expansión de las universidades y la modernización de sus enseñanzas, y una nueva cosecha de héroes garantiza la excelencia de los nuevos saberes y la feliz unión de las teorías más atrevidas intelectualmente con los problemas de las ciencias aplicadas: Friedrich Gauss, Bernhard Riemann, James Clerk Maxwell, Henri Poincaré,...[8]

Fijémonos en James Clerk Maxwell. En la década de 1870, el físico escocés escribió las ecuaciones que rigen la totalidad de los fenómenos electromagnéticos como un formidable sistema de ecuaciones en derivadas parciales para las incógnitas E, campo eléctrico, y B, campo magnético. Formidable pero claro y perfectamente definido, un caso de fortuna, llegó Maxwell y dijo lo que había que decir[9]. Demostró matemáticamente que la luz era una onda electromagnética. Cuando a continuación se calcula la velocidad de esta onda propagándose en el vacío, se obtiene un valor muy cerca de la velocidad de la luz (299.792 km/sg) que se había medido con experimentos cuidadosos. Planteada la existencia de ondas de todas las frecuencias como una consecuencia natural de las matemáticas, pronto se generan tales nuevas frecuencias en el laboratorio[10] y en unas décadas aparece la radio, ventana que se abre a un nuevo mundo de las comunicaciones en que ahora vivimos.

Eso en la parte que toca a la vida diaria. En la parte más intelectual, el mundo de las ondas afecta profundamente al pensamiento de los físicos. La sorprendente invariancia de la velocidad de la

---

[8] Pena da constatar que en esos momentos de gloria España no estuvo aún presente.

[9] Sobre la base de enormes contribuciones precedentes, claro está. Es el mismo Maxwell al que debemos las primeras distribuciones de probabilidad de la mecánica estadística.

[10] Que llamamos hoy radiofrecuencias, rango infrarrojo, rango ultravioleta, etc.

luz ante el movimiento de los ejes coordenados (experimento de Michelson-Morley) junto a la teoría de Maxwell pone los fundamentos sobre los que Einstein asienta la teoría especial de la Relatividad en 1905. Por otra parte, la teoría de ondas ocupa a los investigadores matemáticos con éxito creciente hasta nuestros días, y enlaza con la teoría cuántica del siglo siguiente.

La profunda interrelación de la física experimental, la física teórica y las matemáticas es uno de los más hermosos ejemplos del extraordinario nivel intelectual del Fin de Siglo[11]. Hay muchos otros ejemplos, pero el ejemplo descrito es quizá el más notable para el ciudadano de hoy.

COMIENZOS DEL SIGLO XX

Presenciamos a estas alturas una profunda simbiosis de la matemática más teórica con la ciencia física con sorprendentes, y en muchos casos inesperadas, interacciones. Empiezan a aparecer aplicaciones tecnológicas avanzadas, preludio de lo que será el nuevo siglo. La explosión de las matemáticas en sí y de su aplicación a la ciencia es espectacular en el siglo XX. Por ello seremos injusta pero necesariamente selectivos.

Una de las primeras características a resaltar consiste en la matematización progresiva de otras ciencias que se acelera a final de siglo con los éxitos de la computación. Veamos para empezar dos aventuras matemáticas que vinieron de la física.

La Relatividad. Albert Einstein, el Hombre del Siglo según la revista Time (año 2000), propuso las dos versiones de la relatividad, en 1905 la especial y en 1916 la general. En ambos casos se trata de una reflexión a fondo sobre las matemáticas que han de servir de base a la física. La Relatividad Especial tiene como precursores a Lorentz, Poincaré y Minkowski, que estudian el grupo de invariancia que corresponde a la nueva geometría del espacio-tiempo. La Relatividad General usa los conceptos geométricos que Riemann dejó listos medio siglo antes como ejercicio de especulación sobre “los fundamentos que sirven de base a la geometría”, y que fueron desarrollados por la escuela italiana de geometría diferencial de Ricci, Levi-Civita y Bianchi. La relatividad será un gran campo de juego de la geometría diferencial en el siglo XX[12].

La teoría general de la relatividad es una construcción intelectual motivada por consideraciones sobre todo de tipo matemático. De ella se sigue que el continuo espacio-tiempo se curva en presencia de un objeto masivo. Pronto se pudo observar que la luz de ciertas estrellas se desviaba al pasar junto al Sol (A. Eddington en 1919), confirmando dramáticamente estas predicciones tan contra-intuitivas. En las siguientes décadas, los físicos aplicaron esta teoría para predecir fenómenos novedosos y exóticos como los agujeros negros, o la singularidad inicial que conocemos como el Big Bang. Todo un éxito de la modelización matemática al servicio de los fundamentos de la física. En los dos últimos decenios los estudios de las matemáticas de la Relatividad General se han instalado sólidamente en los grandes centros de investigación matemática, y la figura de Stephen Hawking es objeto de culto popular a la vez que su obra es objeto de estudio para los expertos.

La Mecánica Cuántica. Esta es la otra revolución de la física de comienzos del siglo, quizá la mayor revolución de todas las que nos ha deparado esta ciencia. Desde la hipótesis de los quanta de Max Planck (1900) a las ecuaciones de Schrödinger (1926) pasando por De Broglie, Heisenberg y Dirac, hay dos décadas y media de esfuerzos por dar con el código matemático del mundo atómico. El acceso a ese mundo sorprendente queda al fin codificado en la maravillosa ecuación:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta\psi + V\psi$$

[11] Sentimiento optimista del que eran muy conscientes quienes entonces vivieron.
[12] No escribiremos ninguna de las hermosas fórmulas para no asustar al lector.

donde h es la constante de Planck reducida, $i = \sqrt{-1}$, Δ es el operador laplaciano y V es el potencial. Todo ello parece realmente un trozo de la Cábala, y en el momento inicial se dudaba de qué representaba exactamente la variable $\psi(x,y,z,t)$ llamada "función de onda", cuyos valores son además complejos. Sucedió que, hallado el código matemático, los expertos hubieron de debatir prolongadamente qué significaban sus variables; tal es el extraño poder de las matemáticas. Se propuso la interpretación probabilista donde $|\psi(x,y,z,t)|^2$ es la densidad de probabilidad de encontrar la partícula en el lugar (x,y,z) y en el instante t. Esta teoría tan poco esperable y tan poco intuitiva fue confirmada por todo un siglo de experimentos. Un momento estelar tiene lugar poco después cuando Dirac propone la existencia de la antimateria, en particular de los positrones (1932) porque las ecuaciones indicaban su posible existencia; y los positrones fueron descubiertos al poco tiempo por los experimentales en los rayos cósmicos.

La Influencia de la teoría de la Mecánica Cuántica así fundada sobre las matemáticas puras no es desdeñable: la teoría de operadores autoadjuntos en espacios de Hilbert con su correspondiente teoría espectral son desarrolladas por John von Neumann con el objeto de dar sentido a los operadores que aparecen en la ecuación. La mecánica cuántica ha sido cantera inagotable de problemas para una rama de las matemáticas tan abstracta como el Análisis Funcional, rama que toma vuelo firme en el futuro, por éstas y otras razones.

Cambiemos de tercio y veamos ahora el ejemplo clásico de la interacción de las matemáticas y la ingeniería al principio del siglo, con el nacimiento de la *Aeronáutica*. Tras los impresionantes avances de la física matemática del siglo XIX, y en particular de la mecánica de fluidos, pudiera parecer que un problema antiguo como el del vuelo, que ya había ocupado a Leonardo da Vinci, debería estar resuelto. De hecho, la teoría de variable compleja y de flujos potenciales y vorticosos había obtenido un notable progreso. Pero un desanimado Lord Kelvin reconocía a finales del siglo XIX que el sueño del vuelo propulsado era quizá imposible. Es entonces cuando el método experimental es reivindicado por los hermanos Wilbur y Orville Wright, fabricantes de bicicletas y consumados experimentadores, que logran volar en un artefacto propulsado en las inhóspitas playas de Kitty Hawk, Carolina del Norte, en la mañana del 17 de diciembre de 1903.

Este es un evento experimental que podía haber contrariado a los teóricos, pero por fortuna no fue así, pues la reacción de estos fue fulminante. Hacia 1907 los principales ingredientes matemáticos que faltaban al modelo teórico fueron comprendidos y añadidos (Kutta, Zhukovski, Prandtl). Se trata de los conceptos de sustentación, circulación, capa límite, separación, régimen laminar y turbulento. Se desarrolla entonces una ingeniería que en treinta años nos lleva más allá de la barrera del sonido. Y nacen ramas de la matemática aplicada, como la teoría de las perturbaciones singulares, la teoría de los flujos supersónicos y transónicos y la teoría matemática de la combustión[13].

GRANDES NOVEDADES MATEMÁTICAS

Las matemáticas han vivido el siglo XX pendientes del desarrollo interno de las ideas recibidas del fabuloso siglo anterior. Por fortuna, el siempre difícil intento de prever las líneas del futuro contó con un apoyo en la famosa propuesta de D. Hilbert al II Congreso Internacional de Matemáticos celebrado en Paris en el año 1900. En 23 problemas Hilbert resumía los principales retos con que se enfrentaban las matemáticas, tanto puras como aplicadas[14]. Esos 23 problemas han sido de gran importancia en el transcurso de los años, pero otros problemas y líneas de investigación han venido a complementarlos. Señalemos tres desarrollos importantes entre tantos otros.

[13] Más hacia la matemática teórica tenemos la Teoría matemática de la explosión (o *blow-up*) para las ecuaciones diferenciales no lineales, de tanta actualidad, en la que el autor ha trabajado.
[14] Ver: "*Mathematical Developments arising from Hilbert Problems*", Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, XXVIII, Amer. Math. Soc., Providence, 1976.

El cálculo de probabilidades. Como respondiendo a la necesidad planteada por la mecánica cuántica, pero en realidad independientemente, A.N. Kolmogórov establece en 1933 los "Fundamentos del Cálculo de Probabilidades" sobre la teoría de conjuntos, de la integral y de la medida, tarea a la que se asocian los nombres de P. Lévy en Francia y N. Wiener en EE.UU. Los Procesos Estocásticos, en particular los procesos de Markov, son áreas predilectas de esta floreciente rama de las matemáticas, desconocida por los antiguos, que se ocupa de informarnos sobre lo aleatorio y su evolución probable.

El caos determinista. El estudio del caos que surge en la resolución de las ecuaciones diferenciales, ya anunciado por Poincaré, ha de esperar a la obra de un físico dedicado a los estudios del clima para adquirir el impulso definitivo. En efecto, se atribuye ese mérito a Edward Lorenz, del MIT. Preocupado por el estudio de los procesos convectivos en la atmósfera, propone un modelo no lineal muy simple consistente en un sistema de tres ecuaciones diferenciales ordinarias, que se ha hecho famoso[15]. Estudiando numéricamente este sistema encuentra sorprendido que las curvas (trayectorias) que le produce su ordenador no convergen a ninguna situación periódica. Nacen así el caos determinista, los atractores extraños y toda una rama de las matemáticas tanto teóricas como experimentales. Es una gran novedad, posible gracias al desarrollo de los ordenadores.

Entran en escena los *conjuntos fractales* de B. Mandelbrot[16]. El estudio de los procesos caóticos, fractales y turbulentos es una de las fronteras del pensamiento matemático actual. En su esfuerzo por dominar el caos, los matemáticos han precisado el concepto en forma de "sensibilidad a los datos iniciales" y acuñado frases memorables como el "efecto mariposa" [17]

Un fenómeno natural con una gran componente caótica es el tiempo atmosférico, y aún hoy día la predicción fiable no pasa de unos días. Fenómenos caóticos suceden en la economía, fuente de tantos de nuestros pesares.

LA REVOLUCIÓN DIGITAL. LOS ORDENADORES Y LA MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

La realización práctica del viejo sueño de construir una máquina de calcular en forma del moderno ordenador tiene dos orígenes, la tecnología y las matemáticas, que confluyen en un fantástico invento en el año 1946[18]. Por una parte tenemos el viejo proyecto de la máquina de calcular, pensada ya por B. Pascal en el siglo XVII, y que debe tanto a Ch. Babbage a principios del siglo XIX; proyecto que es realizable en el siglo XX de forma eficiente gracias al avance de la electrónica: primero el tubo de vacío y luego una saga de progresos espectaculares que nos lleva al semiconductor, a la miniaturización y al *chip*. Pero el ordenador no nace como máquina de calcular pasiva, sino que nace con un programa. Esta es la herencia de la lógica matemática, desde G. Boole con su álgebra al programa de formalización de las matemáticas de D. Hilbert, que lleva a la prueba de Gödel en 1931, uno de los hitos de la matemática del siglo XX, y que provoca el interés de un matemático genial, Alan Turing (1912-1954). Turing traduce el programa de formalización al lenguaje de las máquinas en 1937[19] e inventa con Alonzo Church la teoría de la computabilidad, años antes de que el ordenador viera la luz. Sigue un momento histórico: el esfuerzo de guerra, el desciframiento del código alemán Enigma. Entra en escena la arquitectura del ordenador con von Neumann, y se construye el ENIAC apenas terminada la guerra.

---

[15] Cuyas fórmulas pueden ustedes hallar en internet así como la representación gráfica del Atractor de Lorenz. El artículo de 12 páginas data de 1963.

[16] cf. B. Mandelbrot, *The fractal geometry of Nature*, 2nd ed., San Francisco, 1982. Ver además Ian Stewart, *Does God play dice? The New Mathematics of Chaos*, Penguin, Londres, 1989.

[17] Que es en realidad una frase usada por Edward Lorenz en broma en una conferencia en 1972. Algunos han tomado la frase demasiado literalmente, las mariposas del Brasil no parece que sean responsables de los huracanes.

[18] Con esta fecha hago referencia al ordenador ENIAC.

[19] *On Computable Numbers, with an application to the Entscheidungsproblem*, Proceedings of the London Mathematical Society.

En estos 60 y pico años se ha pasado de las grandes máquinas (armatostes) que manejaban kilobytes o megabytes a los ordenadores personales con capacidad de cientos o miles de gigas y a la *www*. La dualidad de la naturaleza se da en el mundo del ordenador en forma de la pareja Hardware-Software.

El mundo computacional, un nuevo mundo para las matemáticas. El mundo del ordenador cambia poco a poco la vida diaria del ciudadano: las transacciones bancarias, el correo electrónico, la reserva de pasajes,... Su efecto sobre las matemáticas, menos conocido del gran público, es aún más dramático. Aparecen por un lado las nuevas ramas de la Matemática Computacional teórica, como la teoría de la computabilidad y la complejidad y la teoría de autómatas y lenguajes formales. Pero todas las ramas de la matemática pura y aplicada se contagian de la repentina capacidad para calcular efectivamente lo que antes era sólo imaginable: órbitas de satélites o trayectorias de sistemas dinámicos, distribuciones numéricas o series temporales de procesos reales, mapas climatológicos o estudios de singularidades, distribución de temperaturas en un alto horno o propiedades estadísticas de los ceros de la función Zeta de Riemann,...

Entre los notables cambios acaecidos, las matemáticas tienen un papel importante en los procesos industriales u otros en que se combina la experimentación en laboratorio con las nuevas herramientas matemáticas: aparece la combinación de *modelización matemática-análisis matemático-simulación numérica-control*, que forma un utensilio de uso habitual en los más diversos campos: las comunicaciones, la climatología, la astrofísica, la ecología, la economía y las finanzas, la ingeniería industrial, la industria automovilística o la medicina. Aparecen con ello los grandes institutos y centros de cálculo[20], y nuevas disciplinas como la CFM, la mecánica de fluidos computacional. Los nuevos conceptos: modelo numérico, simulación numérica, experimento o exploración numérica, visualización dinámica,... se hacen de uso diario en el medio científico e industrial.

Parece conveniente en este punto advertir que una visión demasiado planificadora del progreso matemático, como a veces enuncian algunas autoridades y expertos, pecaría de ilusoria: los grandes descubrimientos matemáticos y científicos suelen ocurrir por caminos insospechados y la teoría que hoy resulta aplicada no lo fue al ser concebida y tardó decenios y hasta siglos en hallar el camino de la aplicación[21].

LOS RETOS DEL SIGLO XXI. MATEMÁTICAS EN LA CIENCIA Y LA INDUSTRIA

En consonancia con lo ya visto sobre la evolución de la matemática pura y aplicada hacia la solidez teórica y la universalidad, el panorama de intereses presentes en el mundo de las matemáticas de cara al futuro es de una gran variedad. Las matemáticas son *ubicuas* y *relevantes*. Mencionaremos a continuación algunos de los principales temas de aplicación que aparecen en la literatura, en los congresos y en los programas de los institutos de investigación. En cursiva señalamos aspectos matemáticos relacionados.

Mecánica celeste. Problemas de la ciencia aeroespacial. *Estabilidad y caos en sistemas dinámicos. Atractores extraños.*

Teoría de fluidos. Aplicación a la Meteorología y la Climatología. Fluidos marinos. Glaciología. Acústica y aplicación a la industria del sonido. Turbulencia. *Predictibilidad y caos. Estabilidad, bifurcación. Problemas de frontera libre. Jerarquías de problemas aproximados (como el modelo geostrófico)*

[20] Uno de tales institutos define su campo de actuación de este modo: "*The main application areas in which the institute has a special competence are modeling, analysis, stochastic treatment, and simulation*".
[21] Ver el artículo de la revista Nature: "*The unplanned impact of mathematics*", nº 475, (2011), pp. 166–169

Aeronáutica. Problemas de la hidrodinámica. Problemas de la combustión (propagación de llamas). *Ondas de choque y ecuaciones hiperbólicas. Capas límite y desarrollos asintóticos. Ondas viajeras.*

Física fundamental. Las matemáticas del mundo atómico y de las partículas elementales. El modelo estándar, la supersimetría, la QED. *Renormalizacián y teorías gauge. Ecuaciones de Yang-Mills, instantones, dilatones,.. Geometrías y topologías exóticas en dimensiones superiores.*

Astrofísica. Relatividad general, modelos estelares. Matemáticas de la física de plasmas, magnetohidrodinámica. *Ecuaciones cinéticas (Botzmann, Fokker-Planck, Vlasov,...).*

Ingeniería. Procesos de la siderurgia, altos hornos. Prototipos de la industria automovilística (fluidos, aerodinámica, materiales y teoría de la fractura). La resistencia de materiales. Microestructuras, composites, nuevos materiales. Los problemas de fractura. *Teorías matemáticas del cálculo de variaciones y la homogenización.* Telecomunicaciones: antenas y radares, *la teoría de campos electromagnéticos*.

Problemas de recursos y minería. Problemas de conservación del medio ambiente. *Las ecuaciones de la extracción de petróleo, de la filtración en los suelos, de la difusión de contaminantes: sistemas no lineales de ecuaciones en derivadas parciales (EDPs) y problemas de frontera libre.*

Ciencia de materiales. Composites. *Elasticidad lineal y no lineal, teoría de la homogenización.* Teorías de fractura. Polímeros. Superconductores.

Teoría de la información. Codificación de mensajes, códigos correctores de errores (por ej. en los CD's). La sorprendente aplicabilidad de la *teoría de números y el álgebra.* Tratamiento de imágenes. Compresión. *Ondículas, fractales, teorías de EDPs no lineales.*

Computación. La construcción del computador cuántico abriría un nuevo mundo a la computación. *Complejidad computacional.*

Robótica. Redes neuronales. *Geometría algebraica y computación.*

Química. Química cuántica: *simulación de la estructura atómica y molecular a partir de las ecuaciones fundamentales.* Dinámica de reacciones. *Matemáticas de la nucleación, crecimiento de cristales y quemotaxis.*

CIENCIAS DE LA VIDA:

Biología: Morfogénesis. Modelos de población. Matemáticas de la genética. Computación ADN.

Medicina: interacción fluido-estructura como modelo del flujo sanguíneo. Estudio de la propagación de tumores. *Problemas de fronteras libres.*

Tomografía. Tomografía computerizada, reconstrucción de imágenes 3D. *Transformadas de Fourier y de Radon. Ecuaciones de difusión no lineales.*

No entraré en más detalles sobre los extensos campos de aplicación de la estadística industrial, la investigación operativa y el control. También deberían ser mencionados temas más inter-disciplinarios como las matemáticas borrosas, los sistemas complejos, la autosemejanza en la naturaleza, la formación de patrones, múltiples temas de aplicación tecnológica inmediata como los sistemas de posicionamiento global, GPS. Sí dedicaremos algún espacio más a la economía, que incluye tanto modelos de la economía global como los del mercado financiero.

Las matemáticas de la incertidumbre financiera. Un ejemplo notable de las aplicaciones prácticas de las matemáticas desarrolladas en los últimos decenios es la llamada matemática financiera. Los nuevos instrumentos financieros de *derivados* se basan y a su vez motivan esta nueva rama de la matemática aplicada, la cual combina procesos estocásticos, ecuaciones en derivadas parciales y problemas de frontera libre. El resultado más famoso es el *modelo de Black-Scholes*[22] para el mercado de opciones, el cual reduce la valoración a la solución de una ecuación del calor, sorprendente ejemplo de *transferencia de conceptos y técnicas* hecho posible por la clave común matemática.

La inestabilidad inherente a esos mercados y las enormes repercusiones sobre la economía pública y privada hacen tanto más importante la aplicación del método matemático para intentar hallar la clave matemática que rige tales procesos, o al menos desarrollar instrumentos de cálculo que nos permitan valorar los riesgos que corremos. Un reto para el nuevo siglo, y para personas más sensatas que las que han llevado la economía en muchos casos recientes.

BREVE APUNTE DEL PROGRESO EN EL SIGLO XXI

Los Problemas del Milenio de la Fundación Clay. Ya hemos señalado el profundo impacto que la lista de problemas propuesta por D. Hilbert en 1900 tuvo sobre sus contemporáneos y sucesores. Cien años más tarde, diversas iniciativas intentaron dar la réplica adecuada[23]. El 24 de mayo de 2000 se anunció en el Collège de France de Paris el Conjunto de los siete problemas matemáticos que constituyen los Millennium Prize Problems, patrocinados por el Mathematics Clay Institute. Recordando a Hilbert, pretende reflejar siete de los más importantes problemas abiertos cuya resolución valdría a los autores un premio de un millón de dólares (cada uno). Estos problemas recorren las diversas áreas matemáticas y son:[24]

1. P versus NP (teoría de la computación)
2. The Hodge Conjecture (geometría algebraica)
3. The Poincaré Conjecture (geometría y topología)
4. The Riemann Hypothesis (teoría de números)
5. Yang-Mills Existence and Mass Gap (física teórica)
6. Navier-Stokes Existence and Smoothness (mecánica de fluidos y ecuaciones en derivadas parciales)
7. The Birch and Swinnerton-Dyer Conjecture (álgebra)

El éxito de Perelman. En el año 2003 el Problema nº 3 fue resuelto por el joven matemático ruso Grigori Perelman, basándose en el modelo de ecuaciones de evolución propuesto en 1982 por Richard Hamilton (el flujo de Ricci). Es el éxito más famoso y celebrado de las matemáticas en el siglo XXI, a unir a la resolución de la conjetura de Fermat por Andrew Wiles a finales del siglo anterior. Perelman combina en forma magistral e inesperada recursos de geometría, ecuaciones diferenciales y funcionales de energía, estos tomados de la física teórica.

Un motivo de ansiedad. En el primer decenio del siglo hubo una intensa actividad para intentar resolver el problema del milenio correspondiente al sistema de ecuaciones de Navier-Stokes, que describe el movimiento de los líquidos y gases viscosos. Formuladas estas ecuaciones ya en el siglo XIX y ampliamente validadas por la experiencia, todavía no se conocen todas sus implicaciones por tener una teoría incompleta. Ello es debido principalmente a la no linealidad de las ecuaciones que puede conducir a la explosión de las estimaciones en que se basa la teoría matemática. Se bloquea así

[22] F. Black, M. Scholes, *The pricing of options and corporate liabilities*, 1973.

[23] Por ejemplo, los libros de V. Arnold, M. Atiyah, P. Lax, B. Mazur, *"Mathematics: Frontiers and Perspectives"*, AMS Publications, 2000, y de B. Engquist y W.Schmid, "*Mathematics Unlimited - 2001 and Beyond*", Springer Verlag, 2001. O el artículo de A. Jackson, *"Mathematical challenges of the XXI Century"*, Notices Amer. Math. Soc., Vol. 47, nº 10 (2000), pp. 1271-1273.

[24] Toda la información sobre el premio y los problemas se puede obtener en la dirección: *http://www.claymath.org/millennium/*

el progreso hacia una teoría matemática satisfactoria sobre la dinámica de fluidos y es una fuente de frustración para los matemáticos ante la evidente utilidad e importancia de estas ecuaciones. Los expertos en ecuaciones en derivadas parciales lamentamos que una de las ecuaciones más emblemáticas nos sea tan esquiva. En términos concretos, el enunciado del problema es demostrar si a partir de unas condiciones iniciales de fluido laminar la solución del flujo para todos los instantes de tiempo es también un flujo laminar (dado por una función regular). Una conjetura similar para las más antiguas ecuaciones de Euler para los fluidos ideales está asimismo abierta.

Los premios Abel. La comunidad matemática ha sufrido enormemente por la falta de visibilidad motivada por la ausencia de un premio Nobel en Matemáticas[25]. El gobierno noruego creó en el año 2002 el Premio Abel, en el bicentenario del nacimiento del insigne matemático noruego Niels Henrik Abel. Ilustres matemáticos lo han recibido desde entonces, el último fue el belga Pierre Deligne, profesor del Institute for Advanced Study de Princeton. Es conocido por sus importantísimos trabajos sobre las conjeturas de Weil, que lograría probar en 1973.

Los premios Nobel de 2013. El Premio Nobel de Física 2013 fue otorgado conjuntamente a François Englert y Peter W. Higgs "por el descubrimiento teórico de un mecanismo que contribuye a nuestra comprensión del origen de la masa de las partículas subatómicas, y que recientemente fue confirmado por el descubrimiento de la prevista partícula fundamental, el bosón de Higgs, en los experimentos ATLAS y CMS en el Gran Colisionador de Hadrones del CERN". La previsión teórica de Englert y Higgs data de 1964, la confirmación de 2012; ello es un claro ejemplo del adelanto de la previsión teórica basada en las matemáticas del llamado Modelo Estándar de la física de partículas[26] sobre la confirmación experimental; es muestra de lo difíciles que están las cosas en ese campo. Para los matemáticos se trata de elaborar una teoría de campos vectoriales sometidos a ciertas ecuaciones en derivadas parciales no lineales que obedecen a un número de simetrías, y en este caso que son capaces de romperlas.

El Premio Nobel de Química fue otorgado a Martin Karplus, Michael Levitt y Arieh Warshel "por el desarrollo de modelos a multiescala para complejos sistemas químicos". Resumiendo la citación, en la década de 1970 los investigadores premiados sentaron las bases de los potentes programas que son usados para comprender y predecir procesos químicos, modelos de cálculo que se han convertido en uno de los avances más cruciales para la química actual. Su éxito se basa en la combinación de la mecánica cuántica, las matemáticas y la informática para comprender la química.

Ambos premios demuestran el carácter interdisciplinar de las matemáticas y su influencia en la investigación actual[27].

COMENTARIOS FINALES

En las páginas anteriores hemos intentado dar una idea de la interacción de las matemáticas con los problemas del mundo real, o de los mundos teóricos de otras disciplinas. Hemos visto como el volumen de lo que podríamos llamar Matemática Aplicada crece en forma acelerada, incluso exponencial, y se expande por las más variadas disciplinas científicas pero también por las actividades sociales. La matemática es hoy omnipresente, no siempre está en la superficie, pero está detrás, trabajando silenciosamente. Pitágoras dijo "todo es número"; exageraba un poco, pero sí podemos decir en línea con Galileo "la efectiva comprensión de casi todo está en los números".

[25] La leyenda lo atribuye a un capricho personal de Alfred Nobel.
[26] Técnicamente, parte de la teoría cuántica de campos.
[27] Hay diversas fuentes que pueden ser consultadas sobre las tendencias y retos del futuro, ver por ejemplo: El informe promovido por la Academia de Ciencias de los EE.UU., *"Fueling Innovation and Discovery: The Mathematical Sciences in the 21st Century (2012)",* The National Academies Press; online.

También hemos apuntado cómo, en el centro de esta actividad interdisciplinar, la matemática es siempre matemática pura; los nuevos capítulos se unen a los anteriores, desde Pitágoras, Euclides y Arquímedes (por poner un inicio) hasta hoy. La unidad de ese edificio es uno de los mayores orgullos de la comunidad matemática del siglo XX.

Muchos temas, conceptos, resultados y personajes de gran relevancia no aparecen en las páginas precedentes. Ello ha de atribuirse a la brevedad del texto y a la ignorancia del autor, que el lector sabrá excusar. Una parte del texto anterior está adaptado de artículos previos del autor: *"The importance of Mathematics in the development of Science and Technology"*, Boletín Soc. Esp. Mat. Aplicada, nº 19, 2001, pg. 69-112, y *"Matemáticas, Ciencia y Tecnología: Una relación profunda y duradera"*, publicado en Encuentros Interdisciplinares, nº 11, Vol. IV (2002), 22-38[28].

Podría parecer que el esfuerzo de divulgar los contenidos y retos de la ciencia es poco útil. Sin embargo, hay una corriente de pensamiento que opina que en esta coyuntura histórica ello no es así en absoluto. El editor de la sección de ciencia de una muy prestigiosa publicación decía recientemente a propósito de los premios Nobel científicos y la dificultad de explicar su relevancia al público: *"Public engagement in science is critical, and a partial understanding is much better than no understanding at all."*

[28] Disponible en: http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/jvazquez/MATCITE6.pdf