HISTORIA DE LA TEORÍA DEL CAOS CONTADA PARA ESCÉPTICOS.
Cuestiones de génesis y estructura

Carlos M. Madrid Casado
Dpto. Matemáticas, Instituto Lázaro Cárdenas
Dpto. Lógica y Filosofía de la Ciencia, Universidad Complutense de Madrid

RESUMEN

Tras dejar constancia de las revolucionarias consecuencias filosóficas del nuevo paradigma (que harían torcer el gesto al gran Inmanuel Kant), ofrecemos una panorámica histórica sobre la constitución de la Teoría del Caos en Física y Matemáticas a partir del campo de la Mecánica (Newton, Laplace, Poincaré), de los Sistemas Dinámicos (Smale) y, en especial, de la Meteorología (Lorenz), hasta llegar a las modernas aplicaciones interdisciplinarias (Thom y Prigogine). A continuación, nos centramos en el problema nuclear de la definición del caos, que compromete el mismo cierre de la disciplina, y que ha hecho albergar dudas a múltiples epistemólogos sobre la virtualidad de la Teoría del Caos. Ilustrando matemáticamente los conceptos fundamentales, concluiremos que esta nueva clase de ciencia induce una lectura novedosa del viejo dilema epistemológico predecir/explicar. Nada más práctico que una buena teoría.

1. SI KANT LEVANTARA LA CABEZA…

El caos está en boca de todos. En el cine, en películas como *Chaos*, *Efecto Mariposa* o *Parque Jurásico*. En la literatura, en novelas como *El pintor de batallas* de Arturo Pérez-Reverte, en donde una fotografía tomada fortuitamente cambia por completo la vida de un guerrillero croata, y en relatos como *A Sound of Thunder* de Ray Bradbury, en que la muerte de una mariposa prehistórica cambia el resultado de una elección presidencial en EE.UU., o como *El hundimiento de la Baliverna* de Dino Buzzati, donde una escalada ociosa por un destartalado muro provoca un desenlace inesperado.

En su *Crítica del Juicio*, el gran Inmanuel Kant dejó escrito acerca de los mecanismos imperantes en la Naturaleza: «Se puede con audacia decir que es absurdo para los hombres tan sólo el concebir o esperar el caso de que pueda levantarse una vez algún otro Newton que haga concebible aun sólo la producción de una brizna de hierba según leyes de la naturaleza no ordenadas por una intención; hay que negar absolutamente ese punto de vista a los hombres». Y, sin embargo, esta ambiciosa afirmación se torna hoy día obsoleta, pues, si se nos consiente la hipérbole, ya ha llegado el tiempo de ese segundo Newton de las hojas de hierba. ¿Su nombre? Michael Barnsley. Y es que, por expresarlo en términos kuhnianos, al *paradigma newtoniano* –el único accesible, junto al *euclídeo*, en época de Kant– le han surgido serios competidores: entre ellos, el *paradigma* de la *Teoría del Caos* y de su inseparable compañera, la *Geometría Fractal*.

Tal y como descubrió Barnsley, con una simple ley y la ayuda de un ordenador somos capaces de lograr que *brote* tal configuración vegetal. Basta realizar lo siguiente: simularemos el lanzamiento de una moneda legal, tal que, fijado un punto como origen (valga cualquiera distinto de los puntos que yacen en la recta diagonal sudeste-noroeste que pasa por el centro de la pantalla), si sale "cara", pintaremos un nuevo punto en la pantalla exactamente a 6 unidades de distancia noroeste del punto anterior, y, si sale "cruz", lo pintaremos movido un 25% hacia el punto central respecto del punto previo. Este procedimiento puede, obviamente, iterarse cuantas veces se desee. Pues bien, al comienzo, la distribución de los puntos dibujados resulta aparentemente aleatoria, azarosa. Pero, enigmáticamente, tras unas cien iteraciones, una determinada forma comienza a *emerger*: una diáfana hoja de helecho va poco a poco apareciéndose. Es *como si* del *caos* surgiese *orden* en *forma* de *conjunto fractal*: es el *Helecho de Barnsley*.[1] Un monstruo topológico no conjurable. Resulta imposible saber qué diría el filósofo de Königsberg si alcanzara a ver la sorprendente cantidad de sistemas sujetos a las Leyes de Newton cuya dinámica es caótica, con todo lo que eso conlleva, esto es, un comportamiento estocástico –y *stochastikos* significa *con buena puntería*– dentro de un estricto determinismo. Caos y fractales constituyen una nueva manera de explorar el Universo (Madrid: 2004).

Figura 1. Generación «espontánea» del Helecho de Barnsley

2. GÉNESIS DE LA TEORÍA DEL CAOS

1) La llamada *Teoría del Caos* nace de la mano de matemáticos interesados en la vinculación entre sistemas dinámicos y topología, como Poincaré o Stephen Smale; de físicos de campos tan dispares como la meteorología o la astronomía, como Edward Lorenz o Michel Hénon; de biólogos estudiosos del crecimiento de poblaciones, como Robert May... E, incluso, a esta larga lista debieran sumarse por méritos propios: James Yorke, David Ruelle, Mitchell Feigenbaum, Michael Barnsley y tantos otros. Pero, ¿cómo empezó todo? ¿Cuál es la historia del caos?.

2) Nos embarcamos en un viaje hacia las fuentes de la Teoría del Caos, recorriendo los tres ríos que desembocan en el mar de la Teoría de los Sistemas Dinámicos: el de la Mecánica Racional de Newton; el de la Mecánica Analítica de Laplace; y, por último, el de la teoría general soñada por Poincaré, quien se constituye por derecho propio como principal protagonista.

El intento por comprender las trayectorias planetarias observadas por Kepler condujo a Newton a modelarlas matemáticamente, siguiendo la estela de Galileo. Newton formuló sus leyes de una forma matemática que relacionaba entre sí las magnitudes físicas y sus velocidades de cambio. Las leyes físicas que describían los sistemas dinámicos quedaron expresadas por medio de ecuaciones diferenciales, siendo los diferenciales medidas de los ritmos de cambio. Sin embargo, la resolución de ecuaciones diferenciales no siempre es fácil. Es más, casi nunca lo es. En esto, la Mecánica Analítica supuso un avance con respecto a la Mecánica Racional. Al aproximarse Mecánica y Análisis, alejándose de la Geometría, el estudiar un fenómeno físico y el hallar las ecuaciones diferenciales que lo gobiernan se hicieron sinónimos. Así, tras el hallazgo newtoniano de las ecuaciones que rigen el

[1] En Barnsley (1985) pueden encontrarse los rudimentos matemáticos de este *juego de caos*: Barnsley considera un SFI (sistema de función iterada) asociado a un algoritmo aleatorio, que produce una secuencia de puntos que dibujan en el límite el atractor al que convergen, en este caso, un helecho vegetal (también, al igual que otros fractales botánicos, puede obtenerse fotocopiando sucesivamente un triángulo).

movimiento de los sistemas de puntos-masa y de los sólidos rígidos, Euler formuló un sistema de ecuaciones en derivadas parciales que describía el movimiento de medios continuos como el agua, el aire u otros fluidos sin viscosidad. Después, Lagrange enfocó su atención en las ondas del sonido, en las ecuaciones de la acústica.

Más tarde, Fourier se centró en el flujo de calor, proponiendo una ecuación en derivadas parciales que lo describía. Entre los siglos XVII y XIX, los físicos fueron extendiendo su dominio matemático sobre la naturaleza al ir proponiendo nuevas ecuaciones diferenciales -por ejemplo, las ecuaciones de Navier-Stokes de los fluidos viscosos o las ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo- para estudiar fenómenos provenientes de varios campos. Toda la naturaleza -sólidos, fluidos, sonido, calor, luz, electricidad- quedó modelada mediante ecuaciones diferenciales. Ahora bien, una cosa era dar con las ecuaciones del fenómeno en cuestión y otra, bien distinta, resolverlas.

La teoría de las ecuaciones diferenciales lineales fue desarrollada por completo en poco tiempo. No así la teoría gemela, la teoría de las ecuaciones diferenciales *no* lineales. Los problemas no lineales se resolvían linealizándolos. Con otras palabras, dada una ecuación diferencial no lineal, se resolvía una ecuación diferencial lineal próxima y las soluciones de aquélla se obtenían perturbando las soluciones de ésta. Sin embargo, esta técnica pronto se mostró insuficiente, puesto que no funcionaba en múltiples casos. Habría que esperar para que las ecuaciones no lineales recibieran una atención pareja a la que tuvieron las ecuaciones lineales.

3) Uno de los problemas no lineales que trajo de cabeza a los físicos y matemáticos desde el siglo XVII fue, dentro del campo de la Mecánica Celeste, de la modelización del Sistema Solar, el problema de los *n* cuerpos, que puede enunciarse de manera muy sencilla: dados *n* cuerpos de distintas masas bajo atracción gravitacional mutua, se trata de determinar el movimiento de cada uno de ellos en el espacio. Aunque el problema tiene un enunciado aparentemente de gran simplicidad, su solución no es en absoluto fácil. Newton resolvió geométricamente el problema de los *dos* cuerpos para dos esferas moviéndose bajo atracción gravitacional mutua en los *Principia*. En 1734 Daniel Bernoulli lo resolvió analíticamente en una memoria premiada por la Academia Francesa.

Y, finalmente, Euler lo resolvió con todo detalle en su tratado *Theoria Motuum Planetarum et Cometarum* de 1744. Tras ser resuelto el problema de los n cuerpos para $n = 2$, los físicos y matemáticos del XVIII y del XIX se encararon con este mismo problema para $n = 3$, puesto que el conocimiento de los movimientos del sistema formado por el Sol, la Tierra y la Luna lo precisaba. Se iniciaron, entonces, dos programas de investigación paralelos. Por un lado, se buscaron soluciones particulares exactas. Así, Lagrange resolvió el problema de los *tres* cuerpos restringido al sistema formado por el Sol, Júpiter y el asteroide Aquiles. Por otro lado, se buscaron soluciones generales aproximadas, mediante el método de perturbaciones. Así, Laplace (Kline: 1992, 653 y ss.).

Simultáneamente, apareció una cuestión muy relacionada con la del problema de los *n* cuerpos: la cuestión de la estabilidad del Sistema Solar (que, a fin de cuentas, en la época, pasaba por ser un sistema de *siete* cuerpos), y cuya solución depende directamente de la que se dé a aquél. Newton sabía que el problema de los dos cuerpos era resoluble con exactitud para todo tiempo, pero que no ocurría así cuando un tercer cuerpo entraba en interacción. Aunque débiles en comparación con la fuerza de atracción del Sol, las fuerzas entre los planetas no eran ni mucho menos despreciables, por cuanto a la larga podían desviar algún planeta de su órbita e incluso, en el límite, expulsarlo fuera del Sistema Solar. Las fuerzas interplanetarias podían estropear las bellas elipses keplerianas, sin que fuera posible predecir el comportamiento del Sistema Solar en un futuro lejano. De hecho, en su trabajo *De motu corporum in gyrum* de 1684, Newton afirmaba que los planetas no se mueven exactamente en elipses ni recorren dos veces la misma órbita. Además, reconocía que definir estos movimientos para todo futuro excedía con mucho la fuerza entera del intelecto humano (Peterson: 1995).

Por consiguiente, seguía en pie esta acuciante pregunta: ¿es el Sistema Solar estable o inestable? ¿Permanecerá cada astro dentro de su órbita o, en el futuro, se desviará? Para Newton, si el Sistema Solar se iba desajustando, se necesitaba una solución drástica: la Mano de Dios tenía que empujar cada planeta dentro de su elipse, reestableciendo la armonía cada cierto tiempo. Frente a Clarke, adepto de Newton, Leibniz sostenía que el Creador no podía ser un relojero tan torpe. El *Deus ex machina* newtoniano provocaba la ira del espantado Leibniz.

Décadas después, Pierre-Simon de Laplace, el gran físico matemático que llegaría a Ministro del Interior de Napoleón, creyó explicar las anomalías orbitales de Saturno y Júpiter, que tanto preocuparon a Newton, como meras perturbaciones que sólo dependían de la Ley de Gravitación y tendían a compensarse en el transcurso del tiempo. Así, al presentar su Mecánica Celeste a Napoleón, pudo colegir que Dios no era una hipótesis necesaria en su sistema del mundo. Sin embargo, la respuesta de Laplace distaba años luz de ser exacta. En sus ecuaciones del sistema Sol-Júpiter-Saturno (problema de los *tres* cuerpos), Laplace despreció un término matemático que creía muy pequeño pero que, en contra de lo por él supuesto, podía crecer rápidamente y sin límite, hasta desestabilizar el Sistema Solar.

Múltiples físicos y matemáticos decimonónicos dedicaron sus esfuerzos a dar una respuesta completa al problema de los *tres* cuerpos y a la cuestión de la estabilidad del Sistema Solar, llegando a contabilizarse más de 800 trabajos al respecto desde los tiempos del gran Isaac hasta 1900 (Barrow-Green: 1997, 7). Entre los matemáticos a los que este problema sin resolver quitó el sueño, uno clave en la configuración de la Teoría de los Sistemas Dinámicos y del Caos: el genial Henri Poincaré.

Figura 2. Jules Henri Poincaré

4) La egregia memoria de Poincaré sobre el problema de los *tres* cuerpos fue publicada en 1890, cuando contaba con sólo 36 años, pero la historia de su publicación comenzó tiempo atrás. Varios años antes, en 1885, los matemáticos europeos tuvieron noticia de que un importante concurso internacional de matemáticas iba a ser convocado bajo el auspicio de Oscar II, rey de Suecia, para celebrar su sesenta aniversario en el trono. Dentro de una competencia internacional, se ofreció un premio al matemático capaz por fin de resolver el problema de los *tres* cuerpos y, de este modo, abrir el camino al estudio de la estabilidad del Sistema Solar. Los principales organizadores y jueces de la competición fueron los matemáticos Mittag-Leffler, Weierstrass, Hermite y Sophie Kovalevskaia, que formularon cuatro preguntas, requiriendo una de ellas la solución al problema de los *n* cuerpos.

Alentado por la competencia, Poincaré profundizó en muchas de las ideas acerca de la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales que había desarrollado entre 1881 y 1886, y que había sedimentado en una colección de cuatro memorias, siendo la principal la *Mémoire sur les Courbes*

Définies par une Équation Différentielle. En estos trabajos, Poincaré se había ocupado de las ecuaciones diferenciales lineales y no lineales desde una perspectiva menos cuantitativa (búsqueda de soluciones explícitas) que cualitativa (estudio de la dinámica y de su estabilidad en el espacio de fases), recurriendo para ello a la naciente Topología. De hecho, como apunta Barrow-Green (1997, 30), Poincaré (1881) ya tenía en mente aplicar esta nueva teoría cualitativa al estudio del problema de los *tres* cuerpos y de la cuestión de la estabilidad planetaria. No en vano, como *leitmotiv* del artículo, llegó a preguntarse: «¿Describe una curva cerrada el punto que se mueve? ¿Se mantiene siempre en el interior de cierta porción del plano? En otras palabras, y hablando en el lenguaje de la Astronomía, nos hemos preguntado si la órbita es estable o inestable».

En 1878, Hill había llamado la atención sobre la importancia de encontrar soluciones periódicas (curvas cerradas) en relación con la estabilidad, y había hallado una solución periódica para el problema de los *tres* cuerpos cuando la masa de dos de ellos es despreciable con respecto al tercero. Estudiando el problema de Hill-Sitnikov, un problema *restringido* de los tres cuerpos, en que un planeta ligero se mueve bajo la atracción gravitatoria de dos estrellas iguales que giran una alrededor de la otra confinadas en un mismo plano, Poincaré demuestra que -al igual que el problema *general* de los tres cuerpos- no es resoluble aplicando el método de las cuadraturas, porque -a diferencia del problema de los *dos* cuerpos- no todas las integrales de movimiento pueden ser resueltas por las leyes de conservación (de la energía, del momento…).

No había una solución general explícita.[2] A continuación, aplicando el método de perturbaciones, obtiene soluciones en forma de serie de potencias a partir de una solución periódica conocida. Sin embargo, no era nada evidente que estas series -como las análogas obtenidas por Euler o Lagrange- fueran (uniformemente) convergentes. Cuando el Análisis le abandona, Poincaré pide ayuda a la Topología, al *Analysis Situs*. Como la estabilidad de las soluciones no puede verse examinando las series, recurre a su teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales: ¿determinan curvas cerradas, es decir, soluciones periódicas? Pertrechado con esta nueva herramienta que él mismo alumbrara, Poincaré prueba la existencia de *infinitas* soluciones periódicas.

El 20 de Enero de 1889, coincidiendo con el 60 cumpleaños del Rey, el distinguido jurado declaró ganador a Poincaré por su *Mémoire sur le Problème des Trois Corps et les Équations de la Dynamique.* Cuando Mittag-Leffler, a quien la lectura de la larga memoria causó dificultades más que considerables, hizo público el contenido de la misma, el astrónomo Hugo Gyldén, su némesis, no tardó -junto a Kronecker- en denunciar que el trabajo de Poincaré no iba más allá de uno suyo publicado en 1887. Pero la situación iba a embrollarse aún más.

Meses más tarde, Julio de 1889, Poincaré se ve acosado por la retahíla de preguntas formuladas por Phragmén, editor de *Acta Mathematica*, quien estaba interesado en iluminar los pasajes más oscuros de la extensa memoria de cara a su publicación. No sin motivo, Hermite escribe a propósito: «En este trabajo, como en casi todas sus investigaciones, Poincaré muestra el camino y da las indicaciones, pero deja mucho por hacer para cubrir las lagunas y completar su trabajo». Y, a finales de Noviembre de 1889, Poincaré descubre un error muy serio en otra parte de su trabajo. Así lo expresa en carta a Mittag-Leffler fechada el 1 de Diciembre: «He escrito esta mañana a M. Phragmén para comunicarle un error que he cometido y dudo que él te muestre mi carta.

Pero las consecuencias de este error son más serias de lo que en principio pensaba. […] No voy a transmitirte el malestar que este descubrimiento me ha causado. […] Son necesarios bastantes cambios» (Barrow-Green: 1997, 119). La situación de Mittag-Leffler se hizo poco menos que insostenible. Intentó recuperar todas y cada una de las copias impresas de la memoria que ya

[2] Esto no quiere decir que no haya una solución general en serie. De hecho, Sundman proporcionó en 1909 una solución general por medio de una serie convergente. Pero que es tan complicada y converge tan despacio, que es completamente inútil en la práctica.

circulaban, sin dar publicidad alguna al error de Poincaré, para que cuando éste se hiciera público el escándalo no le dañara demasiado. Una tirada completa, impresa pero no publicada, de la prestigiosa revista *Acta Mathematica* hubo de ser destruida.[3] Entre tanto, en sólo dos meses, Diciembre de 1889 y Enero de 1890, Poincaré revisó a toda prisa y corrigió por completo su trabajo, mandándolo a imprenta pagado de su propio bolsillo. Poincaré había aceptado pagar los gastos ocasionados, y se estima que pagó más de 3500 coronas suecas, cifra que supera notablemente las 2500 recibidas como premio (Barrow-Green: 1997, 66 y ss.).

El error tenía que ver con el complicadísimo estudio de las soluciones inestables próximas a una solución periódica. Pero, gracias a este error, Poincaré iba a descubrir las trayectorias doblemente asintóticas, homoclínicas, caóticas. Posteriormente, en su monumental ensayo *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Celeste*, publicado en tres volúmenes entre 1892 y 1899, Poincaré dio cabida a la primera descripción matemática del comportamiento caótico en un sistema dinámico en relación con las *órbitas homoclínicas*:

> Cuando uno intenta dibujar la figura formada por estas dos curvas y su infinidad de intersecciones, cada una de las cuales corresponde a una solución doblemente asintótica [homoclínica], estas intersecciones forman una especie de red, de tela de araña, o malla infinitamente enredada; ninguna de las dos curvas puede tan siquiera cruzarse a sí misma, sino que debe plegarse sobre sí misma de un modo muy complicado para poder cruzar una infinidad de veces los enlaces de la tela de araña. Uno siente vértigo ante la complejidad de esta figura que ni siquiera me atrevo a pintar. Nada puede dar una idea mejor de la complejidad del problema de los tres cuerpos *(Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Celeste, III*, pág. 389).

Los enredos homoclínicos son la impronta del caos; y las más de 200 páginas de la memoria de Poincaré constituyen, desde luego, el primer manual o libro de texto en Teoría de Sistemas Dinámicos y Teoría del Caos (Holmes: 1990). Así, en su obra, crea el núcleo de estas dos teorías: existencia y estabilidad de órbitas periódicas, soluciones homoclínicas, etc. «Parece -le describe Hermite, en carta a Mittag-Leffler- como un vidente a quien las verdades se le aparecen con una luz intensa, pero fundamentalmente a él solo» (De Lorenzo: 2009).

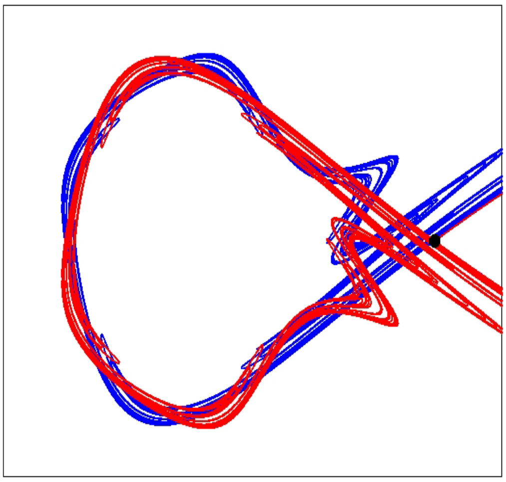

Figura 3. Enredo homoclínico

Además, en conexión con esto, Poincaré contribuyó, como pocos, a popularizar la idea de que existen sistemas dinámicos deterministas cuya predicción resulta imposible para el investigador. En 1908, en *Ciencia y Método*, tomando como base el problema de los tres cuerpos, el movimiento de las moléculas de un gas y la previsión del tiempo meteorológico, concluye:

[3] Sólo se conserva un ejemplar del número original de la revista, celosamente guardado en una caja fuerte del Instituto Mittag-Leffler (Peterson: 1995).

> Si conociésemos exactamente las leyes de la naturaleza y la situación del Universo en el instante inicial, podríamos predecir con exactitud la situación del Universo en un instante ulterior. Pero aun cuando las leyes naturales no guardaran más secretos para nosotros, no podemos conocer la situación inicial más que *aproximadamente*. Si esto nos permite predecir la situación ulterior *con la misma aproximación*, que es todo lo que necesitamos, decimos que el fenómeno ha sido predicho, que está regido por leyes. Pero no acaece siempre así: puede suceder que pequeñas diferencias en las condiciones iniciales produzcan algunas muy grandes en los fenómenos finales. Un pequeño error al inicio engendrará un error enorme al final. La predicción se vuelve imposible (Poincaré: 1963, 55-66).

Por todo esto, a Poincaré se le considera el *abuelo* de la Teoría del Caos. Si Poincaré colocó los cimientos, Birkhoff y, más tarde, Smale y Lorenz terminaron de construirla, convirtiéndose junto a otros en los *padres* de la Teoría del Caos (Madrid: 2008). Pero no adelantemos acontecimientos.

5) Hubo algunos matemáticos que por aquel entonces estudiaron los trabajos de Poincaré sobre el problema de los *tres* cuerpos, dando lugar a nuevos descubrimientos en otros campos afines. Así, por ejemplo, Jacques Hadamard. Aunque diversos ejemplos de sistemas caóticos venían rodando desde antaño, Hadamard fue quien ofreció la primera demostración matemática de que, para ciertos sistemas dinámicos, un pequeño cambio en la condición inicial provoca un gran cambio en la posterior evolución del sistema, con lo que las predicciones a largo plazo resultan completamente gratuitas. Hadamard estudió una especie de billar alabeado en que las trayectorias de las bolas sometidas al mismo son altamente inestables, en el sentido de que dos trayectorias con condiciones iniciales próximas tienden a separarse exponencialmente con el tiempo. Hadamard probó, para este sistema y otros análogos, un teorema de sensibilidad a las condiciones iniciales.

Además, en la misma época, el físico y filósofo francés Pierre Duhem atendió a las importantes repercusiones filosóficas que se derivaban de los resultados probados por Poincaré y por su antiguo compañero de estudios Jacques Hadamard. En el apartado *Ejemplo de deducción matemática que no se puede utilizar nunca* de su obra *La teoría física*, publicada en 1906, Duhem apunta que el cálculo de trayectorias sobre ciertos sistemas como el billar de Hadamard nunca ha de utilizarse, por cuanto cualquier pequeña incertidumbre en la medición de la posición y velocidad iniciales de la bola dará lugar a una predicción espuria, sin valor. La trayectoria predicha nada tendrá que ver con la trayectoria real.

Pero, a pesar del éxito de Poincaré, durante los primeros años del siglo XX no hubo intentos serios de investigar a fondo el comportamiento de las *órbitas caóticas* (sólo con el advenimiento de los modernos ordenadores ha sido posible realizar los laboriosos cálculos y análisis que los resultados de Poincaré demandaban). Con palabras de David Ruelle en *Azar y Caos*:

> Lo que es muy sorprendente, es el largo intervalo que ha transcurrido entre las ideas de Poincaré y el moderno estudio por parte de los físicos del fenómeno de la sensibilidad a las condiciones iniciales. El estudio reciente de lo que ahora llamamos caos no se ha beneficiado de los estudios de Hadamard, Duhem y Poincaré. [...] Yo veo dos razones para el sorprendente intervalo que separa a Poincaré de los estudios modernos sobre el Caos. La primera es el descubrimiento de la Mecánica Cuántica, que conmocionó el mundo de la Física y ocupó todas las energías de varias generaciones de físicos. La Mecánica Cuántica hace intervenir al azar de una forma nueva e intrínseca. Entonces, ¿por qué pretender ahora introducir el azar mediante la sensibilidad a las condiciones iniciales en Mecánica Clásica? Veo otra razón para el olvido de las ideas de Hadamard, Duhem y Poincaré: estas ideas llegaron demasiado pronto, cuando no existían medios para explotarlas. Poincaré no tenía a su disposición esas útiles herramientas matemáticas que son la teoría de la medida o el teorema ergódico, y por lo tanto no podía expresar sus brillantes intuiciones en un lenguaje preciso. Hay que señalar también que cuando no alcanzamos a tratar un problema matemático, siempre podemos estudiarlo numéricamente con la computadora. Pero evidentemente este método, que ha jugado un papel tan esencial en el estudio del Caos, no existía a comienzos del siglo XX (Ruelle: 1995, 54).

6) Sin embargo, la influencia de Poincaré no desapareció por completo, aunque sus ideas tardaron en recibir continuación y estuvieron perdidas durante lustros, según se quejó Smale (1998, 44). Con el paso de los años, bien entrado el siglo XX, dos serían las tradiciones que continuaran la

obra de Poincaré: a un lado del océano, la tradición norteamericana de Birkhoff y Smale; y, al otro lado del *telón de acero*, la tradición soviética encabezada por Kolmogorov y Arnold, deudora de Liapunov.

El conocimiento de la obra de Poincaré se deja notar en los estudios de George David Birkhoff a propósito de las características cualitativas de las ecuaciones diferenciales. En su famoso libro *Dynamical Systems*, 1927, este matemático norteamericano perfeccionó las técnicas topológicas de estudio de sistemas dinámicos introducidas por Poincaré, extendiendo sus ideas en nuevas direcciones.

También en esta línea, y en el contexto norteamericano, destaca con gran talla la figura de Stephen Smale, que ganaría la Medalla Fields -el Premio Nobel de los matemáticos- en 1966 por su gran contribución a la Teoría de los Sistemas Dinámicos. Smale se encuentra justo en la confluencia de las tres tradiciones más pertinentes en el estudio de los sistemas dinámicos, a saber: la tradición olvidada que venía desde Poincaré pasando por Birkhoff; el estudio analítico-topológico de las ecuaciones diferenciales llevado a cabo por Mary Cartwright y John Littlewood en Inglaterra a partir de los trabajos pioneros del ingeniero holandés Van der Pol; y la Escuela Rusa, volcada al inglés por Lefschetz durante la *guerra fría* (Aubin & Dahan Dalmedico: 2002, 291).

Figura 4. Stephen Smale

En los 50, este famoso topólogo se ocupó del estudio del comportamiento cualitativo de los sistemas dinámicos. A diferencia de en el plano, las trayectorias en el espacio pueden anudarse, y este hecho puede complicar extraordinariamente la dinámica. Smale descubrió que hay sistemas dinámicos tridimensionales que son «estructuralmente estables» y que, sorprendentemente, presentan -por decirlo empleando un anacronismo para la época- *atractores extraños*. Al principio, Smale pensaba que esto era imposible, que casi todos, por no decir todos, los sistemas estructuralmente estables presentaban un comportamiento no muy extraño.

Pero, cuál sería su sorpresa, cuando estando en las playas de Río, recibió por carta un contraejemplo a su conjetura. Un colega matemático, Levinson, le hizo llegar un sistema estructuralmente estable, como el que daba origen al oscilador no lineal de Van der Pol, que presentaba una dinámica complejísima (Gleick: 1988, 52-59). Geometrizando el trabajo analítico de Levinson, Smale dio, ya en la década de los 60, con la *Herradura de Smale*, cuya presencia indica la existencia de *caos determinista*. Muchos de los trabajos abstractos de Smale conocerían aplicación de manos del Grupo de René Thom, quien se embarcó en un programa de investigación en topología diferencial cuyo parecido con el de Smale era notorio.

Al mismo tiempo, cruzando el *telón de acero*, existía otra fértil tradición: la Escuela Rusa. En la U.R.S.S. múltiples físicos y matemáticos habían heredado de Alexander Liapunov sus influyentes nociones acerca de la estabilidad del movimiento de los sistemas dinámicos. Trabajando más o menos en la misma época, Liapunov se había ocupado de la teoría de la estabilidad desde una perspectiva más cuantitativa que la de Poincaré: los exponentes de Liapunov. Y en los 50, Andrei Kolmogorov y su discípulo Vladimir Ilich Arnold se concentraron en el estudio teórico de la estabilidad de los sistemas dinámicos de la Mecánica Celeste, recogiendo el testigo de los trabajos de Poincaré y presentando en el Congreso Internacional de Matemáticas que tuvo lugar en Ámsterdam en 1954 el famoso Teorema KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser), que describe qué ocurre cuando a un sistema integrable se le aplica una perturbación no-integrable, y asegura que si las perturbaciones son suficientemente pequeñas, la mayoría de órbitas son estables y cuasiperiódicas, pero otras son impredecibles, formándose islas de estabilidad en un océano de caos.

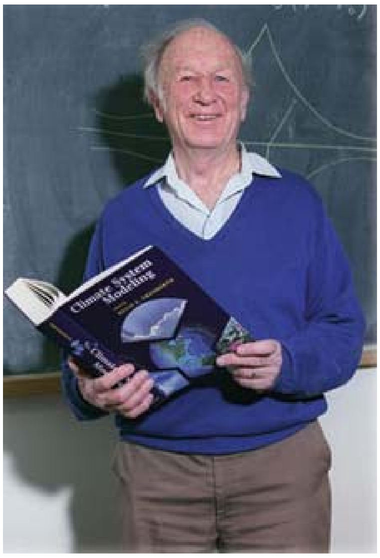

Figura 5. Edward Norton Lorenz

7) De vuelta a EE.UU., en la década de los sesenta, exactamente en 1963, un joven meteorólogo del MIT, Edward Lorenz, antiguo alumno de Birkhoff en Harvard, planteó un modelo formado por tres ecuaciones diferenciales ordinarias para describir el movimiento de un fluido bajo la acción de un gradiente térmico. Mientras buscaba soluciones numéricas con ayuda de una computadora, la Royal McBee LGP-30, el primer ordenador personal (Merrill: 2009, 251), encontró -al volver de tomar una taza de café- con que se manifestaba un dramático comportamiento inestable, caótico. Lorenz se había topado por casualidad con el fenómeno de la sensibilidad a las condiciones iniciales, que hacía de su sistema algo en la práctica impredecible. Una pequeña variación en las condiciones iniciales ocasionaba estados finales completamente diferentes. Dos estados iniciales muy similares podían evolucionar de modo radicalmente distinto.

Tomando prestada la imagen que luego forjaría, Lorenz había descubierto el *efecto mariposa*[4]: el aleteo de una mariposa en Brasil puede ocasionar un tornado en Texas. Supongamos que una pequeña mariposa está posada en un árbol en una remota región del Amazonas. Mientras permanece posada, abre y cierra ocasionalmente sus alas por dos ocasiones. Podría haberlo hecho sólo una vez, pero en este caso ha batido sus alas exactamente dos veces. Como el sistema atmosférico es un sistema caótico, que exhibe dependencia sensible a las condiciones iniciales, la diminuta variación en los remolinos de aire contiguos a la mariposa puede acabar influyendo en que haya o no haya un huracán sobre Texas varios meses después.

[4] Mientras que fue Lorenz quien introdujo la popular metáfora del *efecto mariposa*, fue el matemático norteamericano Guckenheimer el que acuñó la expresión *dependencia sensible a las condiciones iniciales* allá por los años 70.

Lorenz publicó su hallazgo en una revista de Meteorología, en un artículo titulado *Deterministic Nonperiodic Flow* que pasó prácticamente desapercibido. Sólo el profesor James Yorke de la Universidad de Maryland reconoció las repercusiones científicas y filosóficas de la investigación de Lorenz, pues en Lorenz (1963) convergen -como muestra un simple vistazo a la bibliografía citada- los estudios topológicos sobre sistemas no lineales de Poincaré[5], la teoría de sistemas dinámicos de Birkhoff y, atención, como apunta Merrill (2009, 249), la tradición matemática soviética, tal y como ésta quedaba plasmada en el libro *Qualitative theory of differential equations* de Nemytskii y Stepanov, publicado en 1949 en Moscú y traducido al inglés en 1960. El *efecto mariposa* (la dependencia sensible a las condiciones iniciales) y -por decirlo con Rañada (1990, 586)- el *efecto baraja* o *mezcla* (el estiramiento y plegado de las trayectorias) emergieron a la luz, respectivamente, con el *Atractor de Lorenz* y la *Herradura de Smale*. Había renacido la Teoría del Caos.

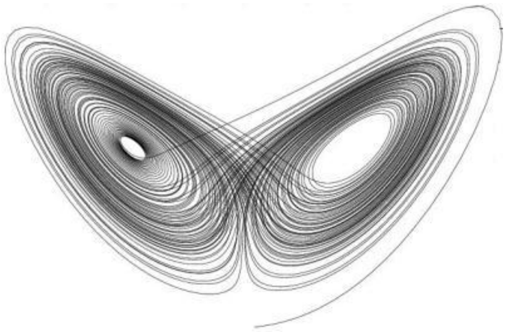

Figura 6. Atractor de Lorenz

8) Si Edward Lorenz ofreció a la comunidad científica el paradigma de sistema dinámico caótico continuo (el sistema de Lorenz), el zoólogo Robert May dio a conocer en su artículo *Simple Mathematical Models with Complicated Dynamics* publicado en *Nature* en 1976 el paradigma de sistema dinámico caótico discreto: la aplicación logística. Además, un año antes, en 1975, se produjo el bautismo oficial: el Profesor Yorke introdujo el término *caos* en la moderna literatura científica, en un famoso artículo publicado con Tien Yien Li y titulado *Period Three Implies Chaos*, aunque el fenómeno que estudió en dicho artículo no coincide plenamente con el que posteriormente se ha identificado como caos determinista (Sanjuán: 2003, 85). Y unos años después, el físico Mitchell Feigenbaum descubrió heurísticamente ciertas constantes universales que caracterizan la transición del movimiento periódico al movimiento caótico mediante la duplicación del periodo, dando inicio a una de las ramas más prometedoras de la Teoría del Caos: la Teoría de la Bifurcación.

A finales de los 70 y principios de los 80, la exploración de aplicaciones de la Teoría del Caos comenzó a dar sus frutos más allá de las simulaciones en las pantallas de ordenador. Entre los fenómenos físicos estudiados bajo la égida del caos cabe destacar los siguientes. Por una parte, en primer plano, la transición a la turbulencia en los fluidos, cuyo estudio contaba con el fértil precedente que suponía el artículo *On the nature of turbulence* de David Ruelle y Floris Takens de 1971, quienes introdujeron la noción de *atractor extraño*, conectada con la noción de *fractal*.[6] Por otra parte, hay que destacar la convección de Rayleigh-Bénard, la reacción de Belousov-Zhabotinsky, el goteo de un grifo

[5] Curiosamente, en su artículo precursor, Lorenz se hacía eco de los trabajos de Poincaré; pero desconocía sus ideas sobre caos y tiempo, su afirmación de que los meteorólogos no pueden decir dónde ni cuándo va a haber un ciclón porque la atmósfera es inestable: «Las matemáticas de Poincaré han tenido su papel, pero sus ideas sobre predicciones meteorológicas tuvieron que ser descubiertas de forma independiente» (Ruelle: 1995, 54).

[6] Precisamente, la Geometría Fractal, elucidada por Benoit Mandelbrot en 1977 apoyándose en los trabajos pioneros de Fatou y Julia en 1918, ha sido considerada la geometría de la naturaleza, por cuanto numerosas estructuras naturales (costas marítimas, hojas de plantas, conchas y caparazones de animales, órganos humanos como los pulmones, galaxias, constelaciones y hasta los anillos de Saturno) siguen diseños fractales, dado que la autosemejanza es una propiedad esencial a gran número de sistemas complejos.

(modelizado por Robert Shaw), ciertos aspectos de la dinámica estelar (modelados por Michel Hénon) y, por último, otros trabajos relacionados, muy presentes en la década de los 90, como son los de la Escuela de Haken, encargada de estudiar el comportamiento caótico de los láseres, o los del Grupo de Bruselas de Prigogine, preocupado por la Termodinámica del No Equilibrio, que enlaza -vía la Teoría Ergódica- con la Teoría del Caos.

9) Finalmente, a comienzos del siglo XXI, la distancia entre Teoría del Caos y Ciencias de la Vida está recortándose a pasos agigantados. Siguiendo la estela de Leon Glass en cardiología, quien aplicó la Teoría del Caos al estudio de las irregularidades de los latidos del corazón[7], o de Schaffer y Kot en epidemiología, hay quienes están aplicándola en Medicina y Neurociencia. Por ejemplo, en electroencefalografía, donde la detección de patrones caóticos y no caóticos (que son, curiosamente, los anormales) en las series temporales medidas parece a día de hoy el único modo de diagnóstico precoz de enfermedades cerebrales (Fariñas & alii: 2009).

Y, sin embargo, las palabras ecuánimes, con una nota de escepticismo[8], de Ruelle (1991, 72) siguen teniendo plena vigencia:

> La teoría matemática de los sistemas dinámicos se ha beneficiado del influjo de ideas *caóticas* y, en general, no ha sufrido de resultas de la evolución en curso… La física del caos, no obstante, a pesar de los recientes anuncios de que se han producido *novedosos* avances trascendentes, ha exhibido una decreciente producción de descubrimientos interesantes.[9]

3. ESTRUCTURA DE LA TEORÍA DEL CAOS

1) A día de hoy, aunque no existe una definición canónica, hay acuerdo sobre que el *caos determinista* pasa por ser la conjugación de dos efectos. Por un lado, el *efecto mariposa* (o dependencia sensible a las condiciones iniciales). Por otro lado, atención, tomando prestada una denominación debida a Rañada (1990), el *efecto baraja*, es decir, la mezcla topológica. Pese a lo que afirmen importantes teóricos de la ciencia de la corriente analítica (excuso decir nombres), no basta con el efecto mariposa: un sistema dinámico que venga dado por una ecuación diferencial sencilla cuyas trayectorias solución sean exponenciales presenta dependencia sensible a las condiciones iniciales, pero allí no hay nada complejo o extraño. Hace falta el confinamiento de las trayectorias.

El caos no consiste sólo en que las trayectorias se estiren y separen, sino también en que luego vuelvan y se plieguen sobre sí mismas dando lugar a configuraciones verdaderamente caóticas. Y, ¿en qué clase de sistemas cabe esperar esta dinámica? En sistemas no lineales y no integrables. Y, dentro de ellos, hay que apuntar que se da un caos en sentido impropio en los sistemas hamiltonianos o conservativos; porque, aunque estos sistemas, como el de los tres cuerpos, pueden dar lugar a un comportamiento nada regular, jamás presentan atractores (Teorema de Liouville).

Y se da un caos en sentido propio o genuino en los sistemas no hamiltonianos o disipativos; porque estos sistemas pueden, al no conservarse la energía, presentar atractores, como el sistema de Lorenz, dando lugar a comportamientos muy irregulares. Lo más sorprendente no es que múltiples sistemas complejos (como la atmósfera) presenten caos, sino que sistemas extremadamente simples (como el péndulo) puedan presentarlo.

---

7 Algo que V. I. Arnold había conjeturado y aparcado por indicación de Kolmogorov (Stewart: 1991, 280).

8 Véanse también las palabras moderadas de Ruelle en el Panel sobre el Impacto de la Teoría del Caos en la Ciencia y en la Sociedad organizado por la ONU (Grebogi & Yorke: 1997, 357 y ss.).

9 Por no mentar, con Bricmont (1995), la visión distorsionada del caos que algunos posmodernos -como Baudrillard- y otros anejos -como Prigogine- ofrecen. Al igual que ocurrió con la Teoría de Catástrofes de Thom, se ha dado una publicidad desmedida al valor científico real de la Teoría del Caos y de la Geometría Fractal. El abuso ha llegado hasta su aplicación delirante al análisis literario o a la gestión empresarial. No en vano, la «broma posmoderna» de Sokal terminaba ensalzando la centralidad de la Teoría del Caos en la Matemática del Futuro.

2) Filosóficamente, si algo enseña la Teoría del Caos, es que la ecuación *determinismo = predictibilidad* es falsa. Frente a los que creían y aún creen que es verdadera, confundiendo el determinismo con la predictibilidad (Laplace, Popper, Prigogine y todos sus epígonos), Poincaré, René Thom y otros teóricos del caos han apostado por diferenciar ambos componentes del binomio determinismo/predictibilidad. El determinismo es una noción *ontológica*, porque refiere a la clase de legalidad que opera en el mundo. Por el contrario, la predictibilidad es una noción *epistemológica*, por cuanto sólo remite a la capacidad de computabilidad numérica de nuestras teorías. Determinismo y predictibilidad no quieren decir lo mismo. El mundo puede ser determinista y nosotros no conocer su determinación, no ser capaces de predecirlo (caos).

3) Para la mayoría de epistemólogos, la predictibilidad es una condición *necesaria* y (casi) *suficiente* de las teorías científicas: *cientificidad = predictibilidad*. La predicción es, desde su enfoque, parte de la esencia o definición de la ciencia. Para Poincaré (1908) y Duhem (1906), por ejemplo, una teoría física no era más que un conjunto de ecuaciones matemáticas con probada capacidad predictiva. Idea que los positivistas del Círculo de Viena recogieron, y que sigue muy viva en neopositivistas como Bas Van Fraassen y en pragmatistas como Larry Laudan: la predicción es una condición necesaria para estar en la caja llamada *ciencia*.

Ahora bien... el carácter científico de la Teoría del Caos es innegable (al menos desde una perspectiva sociológica) y, sin embargo, la predictibilidad de los sistemas caóticos brilla (al parecer) por su ausencia (Werndl: 2009). Como se preguntan Stephen Kellert (1992, 1993), Peter Smith (1998, 2001) o Ian Stewart (1991): ¿Es realmente la Teoría del Caos una teoría *científica*? ¿Es el caos una amenaza para la concepción clásica de las teorías y de la ciencia? Surge, empero, toda una retahíla de preguntas abiertas: ¿Es la expresión «Teoría del Caos» un oxímoron? ¿Es una ciencia? ¿Es útil? ¿Pueden equipararse utilidad y predictibilidad? ¿Acaso revoluciona la Teoría del Caos la noción tradicional de explicación científica? ¿…?

4) En general, por decirlo parafraseando a Schopenhauer, la cuádruple raíz del problema de la predicción tiene que ver con: a) La excesiva simplicidad en las ecuaciones del modelo, b) La imperfección en las constantes del modelo, c) La inexactitud en la medida de las condiciones iniciales y d) La imprecisión en los métodos de cómputo. El caos implica que los errores c) y d) se inflarán espectacularmente, de modo que la trayectoria *real* y la trayectoria *predicha* divergirán notablemente a medio o largo plazo. Empleando palabras de Poincaré: «La predicción deviene imposible…».

Una ilustración de rabiosa actualidad nos la proporciona el Cambio Climático (Madrid: 2007). El propio Lorenz dejó escrito en su artículo seminal con respecto a la predicción del tiempo meteorológico lo siguiente: «Dos estados que difieran imperceptiblemente pueden evolucionar a dos estados considerablemente distintos. Si hay cualquier error en la observación del estado presente –y en un sistema real parece inevitable-, una predicción aceptable del estado en el futuro bien puede ser imposible». Y más recientemente, el Panel Intergubernamental para el Cambio Climático, que sintomáticamente prefiere usar el término *proyección* al de *predicción*, ha advertido que «en la investigación y creación de modelos climáticos debemos reconocer que nos enfrentamos con un sistema caótico y, por tanto, las predicciones de los estados climáticos futuros no son posibles». De hecho, Freeman Dyson, uno de los grandes físicos del siglo XX, ha llegado a decir: «Los modelos climáticos son, esencialmente, herramientas para comprender el clima, que todavía no son adecuadas para predecirlo, no hay que creerse los números sólo porque salen de una supercomputadora».

Pero no hace falta considerar sistemas tan complejos, nos basta con tomar el sistema de May. Por fijar ideas: si estamos interesados en la evolución de la aplicación logística $F(x) = 4x(1-x)$ para el dato inicial *real* $a = 0.900$ y para el dato inicial *medido* $b = 0.901$ (hemos cometido un error del orden de una milésima), observaremos cómo las órbitas de a y de b terminan por alejarse sensiblemente pese a estar inicialmente próximas. En efecto, por recurrencia obtenemos que tras siete iteraciones a se ha transformado en 0.9708 y *b*, por su parte, en 0.9958. ¡¡El error se ha multiplicado por 20 en tan solo 7 iteraciones!!

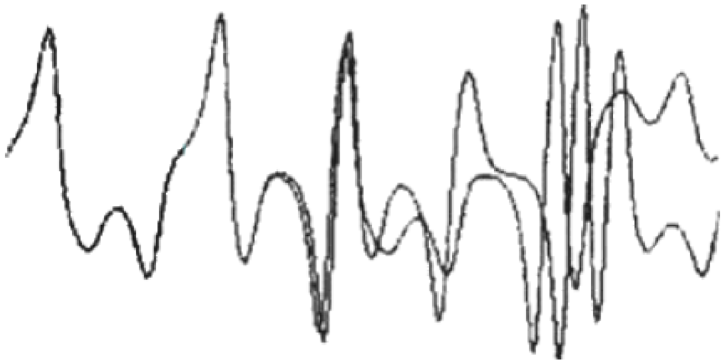

Figura 7. Gráfico que ilustra la separación de dos trayectorias inicialmente muy próximas

5) Sin embargo, conviene precisar que el balance predictivo de los sistemas caóticos -frente a los que nos han hecho creer los divulgadores del *caos posmoderno* (y estoy pensando en aquellos a quienes Sokal y Bricmont [2008] señalan con el dedo, es decir, Deleuze, Guattari, Lyotard... y, entre nosotros, un poco, Antonio Escohotado [2000])- puede ser exitoso a corto plazo e, incluso, positivo de un modo no cuantitativo sino cualitativo, topológico (me refiero, por ejemplo, al cálculo de invariantes en la Teoría de Sistemas Dinámicos). De todas formas, aunque sí que proporciona predicciones (a corto plazo y, sobre todo, cualitativas o topológicas), la Teoría del Caos no lo hace -ni puede hacerlo- de modo suficientemente rico, a la manera de la Teoría de la Relatividad o de la Teoría Cuántica.

6) Llegamos, pues, a un callejón filosófico sin salida, tras nuestro breve paseo por la filosofía de la ciencia. Ya a principios del pasado siglo, Duhem se dio cuenta, en *La teoría física*, de que el descubrimiento de Poincaré y Hadamard era «un ejemplo de deducción matemática que para el físico es una predicción inutilizable». Y, a fin de garantizar predicciones de calidad, exigía estabilidad al dominio de la teoría. La predictibilidad o la adecuación empírica que Van Fraassen o Laudan exigen a las teorías científicas es una característica que sólo es predicable de las que son –como dice René Thom (1985)- *estructuralmente estables*. Para estos epistemólogos, al no ser estructuralmente estable, la Teoría del Caos no es *aceptable*, no es una *buena* teoría científica. Y, sin embargo, lo es, porque es la *mejor* posible.

A veces, el objetivo de los científicos no es ni puede ser construir modelos predictivos o empíricamente adecuados. Hay que elegir: o bien un modelo preciso para *predecir*, o bien una extrema simplificación para *comprender*. Los modelos construidos con ayuda de la Teoría del Caos no son necesariamente *instrumentos* para la predicción, porque sacrifican la meta predictiva en aras de la meta explicativa. Una teoría científica puede no gozar de éxito predictivo y no por ello tener que ser abandonada, ya que puede ser verosímil (i.e., aproximadamente verdadera y con un alto contenido informativo).

La predicción puede fallar y todavía quedar la verdad, porque para el epistemólogo *realista* -a diferencia del epistemólogo común, que por lo general es *instrumentalista*- la ciencia no sólo produce predicciones, sino que versa también sobre la naturaleza de las cosas. La Teoría del Caos no será exitosa predictivamente; pero es verosímil, y el indicador de esta verosimilitud es que es explicativa *a posteriori*, *ex post facto* (nos explica precisamente por qué no podemos predecir ciertos sistemas).

7) Coda. Si la física y las matemáticas de ayer se ocupaban de círculos y relojes, la física y las matemáticas de hoy se interesan por fractales y nubes...

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AUBIN, D.; DAHAN DALMEDICO, A. (2002): «Writing the History of Dynamical Systems and Chaos: *Longue Durée* and Revolution, Disciplines and Cultures», *Historia Mathematica*, 29, pp. 273-339.

BARNSLEY, M. (1985): «Iterated Function Systems and the Global Construction of Fractals», *Proceedings of the Royal Society of London*, A399, pp. 243-275.

BARROW-GREEN, J. (1997): *Poincaré and the Three Body Problem*, AMS, Nueva York.

BRICMONT, J. (1995): «Science of Chaos or Chaos in Science?», *Physicalia Magazine*, 17/3-4, pp. 159-208.

DE LORENZO, J. (2009): *Poincaré. Matemático visionario, politécnico escéptico*, Nivola, Madrid.

DUHEM, P. (1906): *La théorie physique*, Marcel Rivière, París.

---- (2003): *La teoría física. Su objeto y estructura*, Herder, Barcelona.

ESCOHOTADO, A. (2000): *Caos y Orden*, Espasa Calpe, Madrid.

FARIÑAS, F.; LUNDELIN, K.; AGUIRREGOICOA, E.; VARELA, M. (2009): «En la salud y en la enfermedad: una perspectiva de la biología y la medicina desde la teoría del caos y la geometría fractal», *Revista Española de Física*, 23/1, pp. 57-65.

GLEICK, J. (1988): *Caos. La creación de una ciencia*, Seix Barral, Barcelona.

GRIBOGI, C.; YORKE, J.A. (ed.) (1997): *The Impact of Chaos Theory on Science and Society*, ONU, Nueva York.

HOLMES, P. (1990): «Poincaré, Celestial Mechanics, Dinamycal-Systems Theory and Chaos», *Physics Reports*, 193/3, pp. 137-163.

KELLERT, S. (1992): «A Philosophical Evaluation of the Chaos Theory "Revolution"», *Proceedings of the Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association*, Vol. II, pp. 33-49.

---- (1993): *In the Wake of Chaos: Unpredictable Order in Dynamical Systems*, University of Chicago Press, Chicago.

KLINE, M. (1992): *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*, 3 volúmenes, Alianza, Madrid.

LORENZ, E. (1963): «Deterministic Nonperiodic Flow», *Journal of the Atmospheric Sciences*, 20, pp. 130-141.

---- (1995): *La Esencia del Caos*, Debate, Madrid.

MADRID CASADO, C.M. (2004): «Kant y el Helecho de Barnsley», en *Actas del IV Congreso de la Sociedad de Lógica, Metodología y Filosofía de la Ciencia en España*, SLMFCE, Valladolid, pp. 350-352.

---- (2007): «Las Matemáticas del Cambio Climático», *Encuentros Multidisciplinares*, Vol. IX, nº 26, pp. 2-14.

---- (2008): «Edward Lorenz (1917-2008): ¿Padre de la Teoría del Caos?», *Revista Española de Física*, 22/3, pp. 38-40.

MANDELBROT, B. (1997): *La geometría fractal de la naturaleza*, Tusquets, Barcelona.

MAY, R. (1976): «Simple Mathematical Models with Complicated Dynamics», *Nature*, 261, pp. 459-467.

MERRILL, S.J. (2009): «The State of the Science of Nonlinear Dynamics in 1963», *Nonlinear Dynamics, Psychology, and Life Sciences*, 13/3, pp. 249-256.

PETERSON, I. (1995): *El reloj de Newton. Caos en el sistema solar*, Alianza, Madrid.

POINCARÉ, H. (1881): «Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle», *Journale de Mathématiques*, 7, pp. 375-442.

---- (1890): «Sur le Problème des Trois Corps et les Équations de la Dynamique», *Acta Mathematica*, 13, pp. 1-270.

---- (1892-99): *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, 3 volúmenes, Gauthiers-Villars, París.

---- (1908): *Science et Méthode*, Flammarion, París.

---- (1963): *Ciencia y Método*, Austral, Madrid.

RAÑADA, A.F. (1990): *Dinámica clásica*, Alianza Editorial, Madrid.

RUELLE, D. (1991): *Chance and Chaos*, Princeton, Nueva York.
---- (1995): *Azar y Caos*, Alianza, Madrid.
SANJUÁN, M.A.F. (2003): «Caos y Fractales: Conceptos Universales de la Ciencia de la Complejidad. Japan Prize 2003», *Gaceta de la Real sociedad Matemática Española*, 6/1, pp. 81-87.
SMALE, S. (1998): «Finding a horseshoe on the beaches of Rio», *Mathematical Intelligencer*, 20, pp. 39-44.
SMITH, P. (1998): *Explaining Chaos*, Cambridge University Press, Cambridge.
---- (2001): *El Caos. Una explicación a la teoría*, Cambridge University Press, Madrid.
SOKAL, A.; BRICMONT, J. (2008): *Imposturas intelectuales*, Paidós, Barcelona.
STEWART, I. (1991): *¿Juega Dios a los dados?*, Crítica, Barcelona.
THOM, R. (1985): *Parábolas y Catástrofes*, Tusquets, Barcelona.
WERNDL, C. (2009): «What Are the New Implications of Chaos for Unpredictability?», *British Journal of Philosophy of Science*, 60/1, pp. 195-220.