E.M. nº 23 Mayo-Agosto 2006

Encuentros Multidisciplinares

MATEMÁTICAS Y BIOLOGÍA: UN COMENTARIO DE TEXTOS

Miguel A. Herrero
Matemática Aplicada. Universidad Complutense

INTRODUCCIÓN

Las líneas que siguen presentan una reflexión acerca de la relación entre las Matemáticas y la Biología. Con frecuencia ambas ciencias aparecen como polos opuestos del pensamiento humano: implacablemente rigurosa la primera, interesada en todo tipo de mutación y variabilidad la segunda. Al igual que tantos estudiosos de ayer y de hoy, podemos preguntarnos si alguna de las dos tiene algo que aportar a la otra.

¿No son los seres vivos demasiado complejos para que las ciencias cuantitativas (Matemáticas, Física,...) puedan contribuir de forma significativa a su conocimiento? Descendiendo a cuestiones concretas ¿es posible describir el crecimiento de un embrión (o el de un tumor), mediante ecuaciones matemáticas? ¿Tiene sentido plantearse la posibilidad de elaborar una teoría matemática de la consciencia ?. Esta es la cuestión que planteamos. Oigamos algunas opiniones sobre estos temas.

UN RECORRIDO EN EL TIEMPO

La fascinación por las Matemáticas está presente del pensamiento humano desde la Antigüedad. Un rasgo característico de esta ciencia, ya presente en los primeros textos que han llegado hasta nosotros, es el papel crucial que en ella juega el concepto de demostración, es decir, el establecimiento de verdades inmutables deducidas mediante un razonamiento lógico. Esta perennidad de las conclusiones contrasta de manera evidente con la idea de desarrollo, florecimiento y decadencia que caracteriza a los objetos del mundo real. Escuchemos a un viejo maestro:

…Hay hombres que no admiten más demostraciones que las de las matemáticas, otros no quieren más que ejemplos: otros no encuentran mal que se invoque el testimonio de los poetas. Los hay, por último, que exigen que todo sea rigurosamente demostrado, mientras que otros encuentran este rigor insoportable, ya porque no pueden seguir la serie encadenada de las demostraciones, ya porque piensan que es perderse en futilidades… Es preciso, por lo tanto, que sepamos ante todo qué suerte de demostración conviene a cada objeto particular, porque sería un absurdo confundir y mezclar la indagación de la ciencia y la del método, dos cosas cuya adquisición presenta grandes dificultades. No debe exigirse rigor matemático en todo, sino tan sólo cuando se trata de objetos inmateriales. Y así, el método matemático no es el de los físicos, porque la materia es probablemente el fondo de toda la naturaleza.

(cf. *Aristóteles* (1). Nótese, para valorar correctamente el final del párrafo anterior, que para Aristóteles la "física" consiste en el estudio de la naturaleza en general, incluyendo a los seres vivos. Esta desconfianza hacia las Matemáticas se presenta acompañada en el filósofo de un interés bien documentado por la Biología y la Medicina; de hecho, a *Aristóteles*, hijo de un médico, se le atribuye la realización de un considerable número de disecciones (principalmente en animales, pero también en humanos) en el curso de sus trabajos, que incluyen varias obras sobre Biología, pero de los que no ha sobrevivido ninguno sobre Matemáticas (2).

Sin embargo, se atribuye tradicionalmente a *Aristóteles* (aunque probablemente su autoría corresponde a algún miembro de su escuela) una obra de considerable importancia en la historia del pensamiento científico: un breve tratado llamado Mecánica (3), consistente en una colección de 35 problemas cuyo análisis se realiza en general mediante la aplicación, en ocasiones sorprendente, de la ley de la palanca. Es interesante observar que, como se describe en la interesante Introducción a la versión castellana referida en (3), la primera traducción de la Mecánica a nuestra lengua se debe a *Diego Hurtado de Mendoza*, embajador de Carlos I en Venecia y miembro de una ilustre familia cuyo nombre va asociado a la historia del Renacimiento en España. Nuestro embajador realizó esta tarea en el invierno de 1544-1545, en los ratos libres que le consentía su dedicación a la preparación, entre otras cosas, del Concilio de Trento. Sus objetivos al emprender este trabajo los ha expresado él mismo con claridad:

...Mi principal propósito a sido ocupar el tiempo que me sobraua de negoçios en ver y reconocer las obras de Aristotiles,... y llegando a las preguntas mecánicas que están a la fin del libro…

Con la finalidad de que: *Se conozca la utilidad que sale de las sciencias matemáticas, puestas en obra para estas cosas que cada día nos van entre las manos.*

Los enunciados de alguno de los problemas de la Mecánica despiertan inmediatamente nuestra atención: *¿Por qué las cosas de forma redonda y circular se mueven con más facilidad (número 8)?, ¿Por qué los médicos sacan los dientes con más facilidad añadiendo la tenaza como peso que sólo con la mano simplemente (número 21)?.* Uno de esos problemas, la llamada aporía de la rueda, ha jugado un papel relevante en la gestación, larga y penosa, del cálculo infinitesimal. Nos referimos al número 24, que aparece enunciado de la siguiente forma:

No se sabe porqué el círculo mayor da la vuelta en una línea igual que el círculo menor cuando son concéntricos.

En otras palabras: dos círculos concéntricos, al moverse solidariamente, recorrerían una misma longitud, de donde cabría deducir que sus radios son siempre iguales, lo que es absurdo, y permite abundar en la conveniencia de restringir el empleo de las Matemáticas al estudio de los objetos inmateriales .

No es éste el único problema de la Mecánica que suscitó el interés de la posteridad. Por ejemplo, el número 16 plantea la siguiente cuestión:

¿Por qué los maderos son tanto más endebles cuanto más largos y se doblan más al ser levantados, aunque el corto de dos codos, pongamos, sea fino y el de cien codos sea grueso?.

Muchos siglos después, *Galileo Galilei*, que había enseñado en Parma la mecánica aristotélica, reformuló esta observación en términos de un problema de optimización: la caracterización de los cuerpos de forma dada que poseen el máximo tamaño posible, sin colapsar bajo su propio peso.

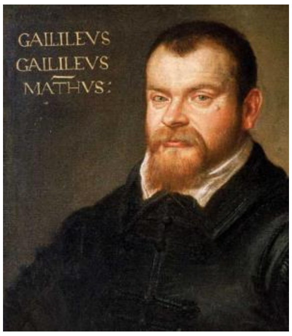

Figura 1: Galileo Galilei (1564-1642)

En la que es quizás su obra maestra (4), Galileo obtiene, mediante la aplicación de lo que llamaríamos hoy un argumento de similaridad, el siguiente resultado:

Proposición VII (4): Entre todos los prismas y cilindros pesados de similar figura, existe uno , y solo uno, que bajo el esfuerzo de su propio peso, permanece en el límite entre romperse o no; de modo que todo objeto mayor es incapaz de sustentar su propio peso y se rompe, y todo objeto menor puede resistir alguna fuerza adicional tendente a romperlo.

Observemos de pasada que para *Galileo* son cilindros similares aquellos en los que la proporción entre longitud y altura permanece constante. Una vez establecida la Proposición anterior, Galileo plantea formalmente un problema de diseño óptimo:

Proposición VIII (4): Dado un cilindro o prisma de longitud máxima y que no se rompe bajo su propio peso, y dada una longitud mayor, calcular el diámetro de otro cilindro o prisma de esta nueva longitud que sea del tamaño máximo capaz de sustentar su peso.

La resolución de la cuestión anterior, expuesta en (4) en el curso de una conversación entre interlocutores aficionados a las ciencias (Salviati, Sagredo y Simplicio), despierta la admiración de este último, en quien se ha visto un trasunto del Sumo Pontífice. El personaje que representa al propio *Galileo* (Salviati), afirma que tras emplear *"no pequeña cantidad de tiempo"* en su estudio obtuvo la conclusión de que la nueva altura es la media proporcional entre las alturas del cilindro inicial, y la del similar a éste con la nueva longitud. Consciente del efecto logrado entre sus interlocutores (y en sus lectores a lo largo de los siglos), Salviati puntualiza algunas conclusiones de su análisis:

…De lo dicho antes se deduce la imposibilidad de incrementar el tamaño de las estructuras hasta vastas dimensiones, tanto en la naturaleza como en el arte… No puede la naturaleza producir árboles de tamaño extraordinario, ya que las ramas se romperían bajo su propio peso; sería imposible construir los huesos de hombres, caballos u otros animales de modo que se mantengan juntos y realicen sus funciones normales, si esos animales tuvieran que crecer enormemente en altura, ya que tal incremento en altura se podría conseguir solamente empleando un material más duro y resistente que el habitual o haciendo crecer el tamaño de los huesos, lo que haría cambiar la forma de modo que la apariencia de estos animales sería monstruosa...

Como ilustración, he dibujado un hueso cuya longitud natural ha sido incrementada tres veces, y cuyo grosor ha sido amplificado hasta que pueda cumplir la misma función que el hueso pequeño desempeña en el animal pequeño (ver Figura).

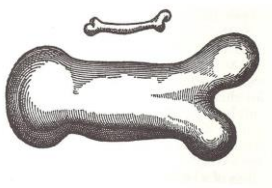

Figura 2: Huesos funcionalmente equivalentes (ver 4)

Claramente, si queremos mantener en un gigante la misma proporción que la que se encuentra en los hombres ordinarios, o bien hay que encontrar un material más resistente para construir los huesos, o debemos aceptar una disminución de la fortaleza en comparación con los hombres de estatura ordinaria, ya que si su altura creciera desproporcionadamente, caería y sería aplastado bajo su propio peso,..

He aquí una puntualización al escepticismo aristotélico. El razonamiento de *Galileo* hace notar que los seres vivos están sometidos a limitaciones funcionales descritas por leyes físicas, y expresables (y deducibles) mediante modelos matemáticos.

DE LO COMPLEJO A LO SIMPLE: UN VIAJE DE IDA Y VUELTA

El mismo año 1642 en que murió *Galileo* nació *Isaac Newton*, cuya influencia sobre el mundo contemporáneo es difícil de exagerar. En su gran obra *Principia* (5), Newton desarrolló un tipo de razonamiento mediante el que se obtiene información esencial acerca de problemas complejos a partir del estudio de ejemplos bien escogidos, relativamente simples, discutidos en términos matemáticos (fundamentalmente geométricos en su caso). Según esta visión, expuesta aquí de manera esquemática, la matemática permitiría por si sola revelar los secretos más recónditos de la naturaleza, como es el caso del movimiento de los cuerpos celestes, imponiendo así la primacía de la razón sobre el fárrago de los hechos experimentales, confusos y cambiantes.

Uno de los entusiastas defensores de esta idea fue *Voltaire*, a quien se debe en gran medida la difusión en el continente europeo de la obra de *Newton*, que conoció como exiliado en Londres. *S. Chandrasekhar* nos recuerda en (6) una anécdota reveladora. Newton había postulado, mediante cálculos matemáticos, un valor para la excentricidad (esto es, de la desviación de la forma perfectamente esférica) de la Tierra que contradecía la evidencia astronómica de su tiempo. Para aclarar esa discrepancia, *Maupertuis* y *Clairaut* se desplazaron a Laponia, y realizaron cuidadosas mediciones que confirmaban el achatamiento de la Tierra por los polos, predicho por *Newton*. El comentario mordaz de *Voltaire* no tiene desperdicio:

Vous avez confirmé, dans les lieux pleins d´ennui,
Ce que Newton savait sans sortir de chez lui.

El Siglo de las Luces marcó tal vez el apogeo de la confianza ilimitada en la capacidad de las matemáticas como herramienta para entender el mundo. Se desarrollaron entonces detallados estudios fisiológicos, y es interesante hacer notar que la primera aparición detallada de las ecuaciones de movimiento de un fluido tiene lugar en esa época, en el contexto del estudio de la circulación sanguínea (7).

La tarea de seguir al detalle la evolución histórica de la relación entre matemáticas y biología excede con seguridad el espacio dedicado a este breve ensayo (y muy probablemente escapa a la capacidad del autor). Nos limitaremos a señalar aquí que el papel de liderazgo científico atribuido a las matemáticas en el siglo de las luces, y que se pone de manifiesto en la famosa expresión atribuida a *Kant*, y según la cual sólo se puede considerar ciencia aquella que está matemáticamente formalizada (8), ha sido enérgicamente criticado en épocas posteriores. El lector encontrará una interesante descripción de las vicisitudes sufridas por la llamada Biología Matemática en la referencia (9), a cuya autora se deben importantes aportaciones en este campo.

En concreto, en (9) se describen los resultados de un famoso debate que tuvo lugar en Cold Spring Harbor en 1934, y en el que uno de los pioneros de la Biología Matemática en el siglo XX, *Nicolas Rashevsky*, expuso su modelo físico-matemático de la célula (que suponía esférica). La respuesta de los biólogos presentes fue en general, hostil. El entonces Director del centro (*Eric Ponder*) resumió esos puntos de vista en un memorando, en el que se podía leer:

...Un punto en el que hay acuerdo general es que parece haber muy poca relación entre el esfuerzo dedicado a lo que se ha dado en llamar las matemáticas del crecimiento, y la comprensión obtenida de ese campo... Es intrínsecamente improbable que el comportamiento de un sistema en crecimiento deba ajustarse al de un simple sistema químico, y la idea de crecimiento como un simple proceso físico-químico no puede ser aceptada en ausencia de una prueba directa y fehaciente… Es inútil conjurar en la imaginación un sistema de ecuaciones diferenciales con objeto de describir hechos que no sólo son muy complejos, sino en gran medida desconocidos…

Lo que necesitamos en la actualidad es más mediciones y menos teoría… En la hora presente existe una desdichada confusión entre Biología Cuantitativa y Biomatemática. Hasta que los datos experimentales nos hayan suministrado más hechos biológicos, prefiero la primera ciencia a la segunda...

Los párrafos anteriores merecen ciertamente una reflexión, en cuanto que reflejan una actitud de desconfianza ante lo que a veces se considera una inexplicable presunción por parte de algunos matemáticos, celosos guardianes de una técnica capaz de explicar todos los misterios del Universo. A ello se superpone una idea que emerge periódicamente a lo largo de la historia, y que se encuentra implícita en el párrafo de Aristóteles que abre estas páginas: la existencia de un *Principio Vital* característico de los seres vivos, y sólo de ellos, y que no podría reducirse a las leyes físico-químicas que rigen para la materia inorgánica. Incidentalmente, esa cuestión está en origen del desarrollo de la Biología Molecular contemporánea, una de las joyas científicas del siglo XX. En efecto, para muchos autores, la importancia atribuida a esa posibilidad por *Niels Bohr*, y el encargo hecho a su discípulo *Max Delbrück* para que estudiara ese problema (ver, p. ej., (10)), marca el punto de partida de esa amplia e importante área de estudios.

Si bien los textos citados reflejan un claro distanciamiento entre matemáticos y biólogos, no faltaron, ni faltan, voces discrepantes. Por ejemplo, en el año 2000, John Bonner, a quien se deben algunos estudios clásicos en la Biología del siglo XX, se preguntaba en (11) si existirá una explicación simple para ciertos procesos de desarrollo:

...Este triunfo del reduccionismo nos lleva naturalmente a considerar si existirá una macroexplicación que buscar antes de ser abrumados por los detalles, por maravillosos que estos sean. A primera vista, parecería que no hay nada nuevo que decir a este respecto, y que tendremos que conformarnos con la explicación tradicional, según la cual hay una cascada de relaciones causales que nos conduce a los detalles de cada uno de estos pasos. A mi me gustaría ver la cosa de otro modo. Hay un deseo profundo de explicaciones simples que trasciendan los detalles, aunque dependan completamente de éstos.

Una afortunada búsqueda de la simplicidad puede encontrarse en la aplicación de las matemáticas al problema del desarrollo. Un pionero en el campo fue A. Turing, quien mostró que el desarrollo de estructuras en organismos puede ser descrito en términos de ecuaciones de reacción-difusión. Este es un modo elegante de demostrar que muchas estructuras que aparecen durante el desarrollo pueden ser explicadas teóricamente mediante un mecanismo simple. Para ello se requiere: (1) una sustancia activadora que se difunde y es autocatalítica, y (2) un inhibidor del activador, que se difunde con mayor rapidez (y al que corresponde por tanto una molécula menor). Tan pronto como se establece un gradiente de estas sustancias, ellas son capaces de producir una estructura a lo largo de ese gradiente...

Bonner se refiere a un celebrado artículo (12) publicado por *A. Turing* en 1952 sobre las bases químicas de la morfogénesis, que comienza así:

...Proponemos que un sistema de substancias químicas, llamadas morfogenes, que reaccionan y se difunden a través de un tejido, permite describir los aspectos fundamentales de la morfogénesis. Tal sistema, aunque inicialmente puede ser completamente homogéneo, puede posteriormente desarrollar una estructura debido a una inestabilidad de su equilibrio homogéneo, desencadenada por perturbaciones aleatorias.

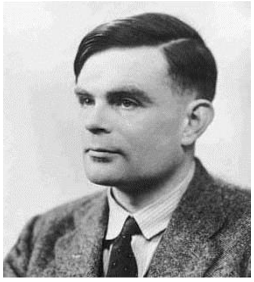

Figura 3: Alan M. Turing (1912-1954).

De hecho el estudio de *Turing* hace uso fundamentalmente de ecuaciones lineales. El autor conocía perfectamente las limitaciones de los sistemas de cálculo disponibles en su tiempo (el mismo había contribuido de manera relevante al desarrollo de la moderna ciencia de la computación), y por ello hace notar explícitamente en su trabajo que el análisis de las ecuaciones no lineales queda fuera de su alcance. De hecho, la formulación y estudio de un sistema elemental, no lineal, de tipo activador-inhibidor, se debe a *Gierer* y *Meinhardt* (13) en un trabajo publicado en 1972 sobre las propiedades regenerativas de un celentéreo, la hidra de agua dulce, que ya había despertado la curiosidad de los fisiólogos de la Ilustración. Un esquema del funcionamiento de este tipo de sistemas se muestra en la Figura 5.

A partir de esa fecha es perceptible un interés renovado por la aplicación de métodos y modelos matemáticos en Biología del Desarrollo. Es interesante hacer notar que en un manual bien conocido en ese campo como es el de *Wolpert* (15), y que se abre con una mención a la hipótesis epigenética de *Aristóteles* (página 3), es posible encontrar una página (317) dedicada a comentar, no sin cierto distanciamiento, la posible aplicación de sistemas de reacción-difusión para explicar la formación de estructuras orgánicas en el curso del desarrollo.

Figura 4: *A. Gierer* (derecha) y *H. Meinhardt* (izquierda).
Fotografía reproducida con permiso de los editores de la Referencia 17.

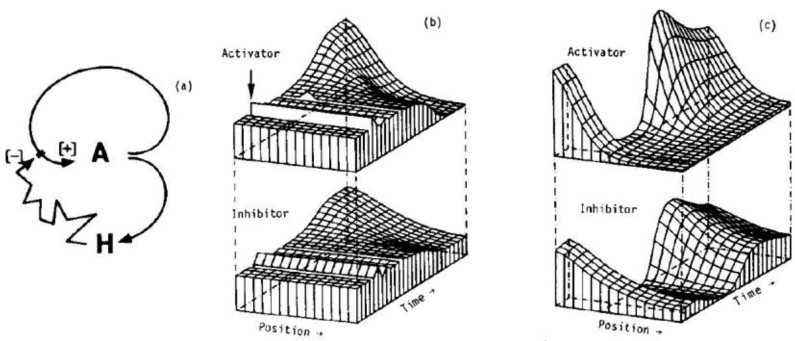

Figura 5: Generación y regeneración de una estructura (reproducido de la Monografía (14)). A) Esquema reactivo: se parte de una sustancia autocatalítica (el activador, A) y de un antagonista suyo que se difunde con mayor rapidez (el inhibidor, H), (b, c). Formación de estructuras en una cadena lineal de células: las concentraciones de activador e inhibidor se representan en función de la posición y el tiempo; (b) Una distribución uniforme de ambas sustancias es estable; un incremento de activador (flecha) desaparece a consecuencia de un crecimiento compensatorio de la concentración de inhibidor. Sin embargo, un pequeño incremento *local* de activador (o incluso una fluctuación aleatoria) no puede ser compensada, ya que la cantidad de inhibidor producida adicionalmente se difunde rápidamente en el medio; (c) la estructura así formada posee propiedades de autoregulación; en particular, es capaz de regeneración. Al eliminar un máximo de la concentración de activador, el inhibidor restante decrece, y un nuevo máximo aparece por autocatálisis.

CONCLUSIÓN

Hemos empezado estas reflexiones recordando la opinión de un maestro antiguo. Permítasenos ahora expresar la de un maestro moderno:

…Los matemáticos exageran un poco las dificultades de su sabiduría. Las matemáticas, aunque muy extensas, son después de todo habas contadas. Si hoy parecen tan difíciles es porque falta la labor directamente dirigida a simplificar su enseñanza. Eso me sirve de ocasión para declarar por primera vez con cierta solemnidad que si no se fomenta ese género de labor intelectual, dedicada no tanto a aumentar la ciencia… cuanto a simplificarla… el porvenir de la ciencia misma será desastroso. (16).

He aquí, separadas por más de veinte siglos, dos visiones críticas sobre la utilidad de las matemáticas. La primera desafía su capacidad para abarcar, con sus rígidos métodos, la complejidad del mundo de los seres vivos, y el de la naturaleza en general. La historia ha demostrado fehacientemente que al menos una parte de esta opinión era infundada, y el desarrollo, mutuamente benéfico, pero no carente de alguna tensión, de la Física y las Matemáticas, así lo atestigua.

El último texto llama la atención sobre el ensimismamiento de las Matemáticas (o tal vez de algunos matemáticos), atentas sólo a su propio desarrollo, considerado como un fin en si mismo y ajeno al mundo en el que tiene lugar. Es curioso observar que esta tendencia, real sin duda, ha coexistido tradicionalmente con la contraria, es decir con lo que podríamos caracterizar como comportamiento invasor de las Matemáticas (o tal vez de algunos matemáticos) dispuestos a explicar a otros investigadores los secretos de sus propias ciencias, tal vez ocultos a sus ojos tras la maraña de los detalles.

Habiendo abusado sobradamente de la paciencia del lector, a quien por fuerza habrá que suponer curioso, con la exposición de estas opiniones, concluiremos con una más. Pensamos que las Matemáticas pueden aportar mucho a la Biología y a la vez beneficiarse en gran medida de su contacto con ésta. Empezando por esta última afirmación, cabe observar que el desarrollo de grandes áreas de las Matemáticas en el siglo XX (como son la estadística, la teoría de ecuaciones diferenciales, etc.) se ha visto en gran medida estimulado, cuando no dirigido, por la necesidad de comprender fenómenos biológicos relevantes. Por ejemplo, el estudio de los mecanismos de transmisión de señales en el sistema nervioso ha influido considerablemente en el desarrollo de la teoría de ondas viajeras en ecuaciones diferenciales, lo que a su vez ha afectado de modo significativo al tipo de problemática abordada en ese campo. De hecho, y tomando prestado un término de uso común, podríamos decir que, en este intercambio, la balanza de pagos científicos es hasta ahora favorable a la Biología. Nos toca ahora equilibrarla, y para ello probablemente habrá que atender a la llamada de Ortega y proceder a un esfuerzo de simplificación en el método, acompañado por la renuncia a muchas técnicas, penosamente puestas a punto durante años, y al desarrollo de otras. Esta selección de contenidos es perfectamente natural, y de hecho cada generación de investigadores ha abandonado en muchos casos (y redescubierto en otros) gran parte del trabajo científico de las generaciones anteriores.

La Biología parece necesitar de métodos cuantitativos potentes, simples (al menos en su manejo), robustos (capaces de operar bajo cambios significativos en los parámetros involucrados) y de carácter modular, al estilo de los juguetes Lego, permitiendo así añadir esquemas nuevos a modelos preestablecidos, de modo que la interconexión entre lo nuevo y lo viejo sea fácil. ¿Seremos capaces de proporcionar a nuestros colegas en las Ciencias de la Vida estas técnicas, que probablemente nos llevarán a problemas matemáticos bellos y profundos?. Tal vez entonces el espíritu de Aristóteles se verá obligado a reconocer, quien sabe si con oculta satisfacción, que el método matemático es capaz de arrojar luz en el estudio de cualquier parte de la naturaleza, y no solo en el mundo de los objetos inanimados.

Lecturas recomendadas. Dos interesantes referencias divulgativas podrían ser el artículo de E. F. Keller y el de Gordon-Belusov.

REFERENCIAS

Aristóteles: *Metafísica*, Libro II. Ed. Austral, Madrid (1981).

Véase por ejemplo: *Opere biologiche di Aristotele*, editadas por D. Lanza y M. Vegetti, Ed. UTET, Turín, Italia (1971). Entre las obras, muchas perdidas, que Diógenes Laercio atribuye a Aristóteles (cf. *Lives of eminent philosophers*, vol. I, Harvard University Press, 1980), pocos títulos sugieren un contenido matemático, aunque aparece uno llamado precisamente "Sobre las matemáticas" (op.cit., pág. 469).

Aristóteles: *Mecánica*. En Biblioteca Clásica de Editorial Gredos, vol. 227 (2000).

Galileo Galilei: *Discorsi intorno a due nuove scienze* (1638). En *Opere di Galileo Galilei*, editadas por F. Brunetti, Ed. UTET (1996). Hay una excelente edición en inglés*: Dialogues concerning two new sciences…*, a cargo de H. Crew y A. de Salvio, Ed. Dover (1954).

I. Newton: *Philosophia naturalis principia matematica* (1686). Traducción al inglés de A. Motte (1739), revisada por F. Cajori en 1934, en *Principia, vols. I and II*, University of California Press (1962).

S. Chandrasekhar: *Ellipsoidal figures of revolution*, Ed. Dover (1987).

L. Euler: *Principia pro moto sanguinis per arterias determinando* (1775). En este trabajo, y tras obtener lo que hoy llamamos ecuaciones de Euler en una dimensión espacial, el autor añade unas célebres palabras: *"In motu igitur sanguinis explicando easdem offendimus insuperabiles difficultates, quae nos impediunt omnia plane opera Creatoris accuratius preescrutari".* Una traducción (muy libre) diría aproximadamente esto: En el análisis de estos movimientos encontramos dificultades insuperables que nos impiden conocer en detalle la obra del Creador.

En la Introducción a su célebre obra *On Growth and Form* (1917), D´Arcy Thompson afirma lo que sigue: *…Sobre la química de su tiempo, Kant opinaba que era una ciencia, pero no Ciencia (eine Wissenschaft, aber nicht Wissenschaft), porque el criterio para distinguir una verdadera ciencia reside en su grado de matematización.*

E. F. Keller: *Making sense of lif: Explaining biological development with models, metaphors and machines*, Harvard University Press (2002)

Véase el discurso de aceptación del premio Nobel por Max Delbrück en 1969, que se puede encontrar en la dirección: http://nobelprize.org/medicine/laureate/1969.

J. T. Bonner: *First signals: The evolution of multicellular development*, Princeton University Press (2000).

A. M. Turing: *The chemical basis of morphogenesis*, Phil Trans. Roy. Soc. London (1952) 37, 37-72.

A. Gierer y H. Meinhardt: *A theory of biological pattern formation*, Kybernetik, 12 (1972), 30-39.

H. Meinhardt: *Models of biological pattern formation*, Academic Press (1982).

L. Wolpert: *Principles of development*, Oxford University Press (1998).

J. Ortega y Gasset: *Misión de la Universidad*. Alianza Ed. (1982), pág. 69.

R. Gordon, L. Belousov (2006): *From observations to paradigms: The importance of theories and models.* An interview with Hans Meinhardt . Int. J. Dev. Biol. 50, 103-111. Se puede descargar de la red, entrando en la página personal de Hans Meinhardt.