

MATEMÁTICAS DE LAS SEÑALES

Eugenio Hernández

Departamento de Matemáticas. Universidad Autónoma de Madrid

Una señal es cualquier magnitud que podamos medir de alguna forma y que contiene información sobre el comportamiento o la naturaleza de algún fenómeno. Las señales están presentes en nuestra vida diaria; por ejemplo, sirven para controlar nuestra salud (electrocardiogramas, ecografías, fotografías de rayos X), mostrar la tendencia del índice de precios, estudiar el comportamiento de huracanes u otros fenómenos relacionados con el tiempo atmosférico, detectar bolsas de petróleo en el interior de la Tierra, almacenar y recuperar información sobre los accidentes geográficos de una región, comunicarnos con otras personas a través del teléfono o vía Internet y presenciar acontecimientos que se producen a miles de kilómetros del lugar en que nos encontramos a través de la televisión. Basten estos ejemplos como muestra de la ubiquidad de las señales al comienzo del siglo XXI.

Desde el punto de vista matemático una señal es una función de una o varias variables cuyo dominio de definición puede ser un continuo o una cantidad finita de puntos. La forma de una señal sonora o de una producida por un electrocardiograma cambia con el paso del tiempo, de manera que su amplitud es una función de una sola variable, es decir una señal unidimensional. Una imagen fija es, por el contrario, una señal bidimensional porque está definida sobre un entramado de dos dimensiones. Si nos fijamos en una imagen en movimiento, por ejemplo, un video, además de las dos dimensiones de cada fotograma hay que añadir el movimiento en el tiempo, lo que hace que estas señales sean tridimensionales.



Figura 1. Señal procedente de un electrocardiograma.



Figura 2. Señal de un huracán tomada desde un satélite.

1. SEÑALES UNIDIMENSIONALES PERIÓDICAS. SERIES DE FOURIER.

Las señales unidimensionales periódicas más simples definidas sobre un continuo son las sinusoides, $s(t) = a \cos(2\pi\omega t)$ o $s(t) = a \sin(2\pi\omega t)$, que se representan con una onda con amplitud a y cuya frecuencia es ω ; esta magnitud indica el número de oscilaciones de una señal en una unidad de tiempo. El tiempo y las frecuencias de una señal unidimensional son variables independientes que juegan un papel destacado en su tratamiento. Cuando la frecuencia no depende del tiempo se dice que

la señal es *estacionaria*. Estas sinusoides tienen, además, la particularidad de que son periódicas de periodo $T = 1/\omega$, porque su gráfica se repite cada T unidades de tiempo.

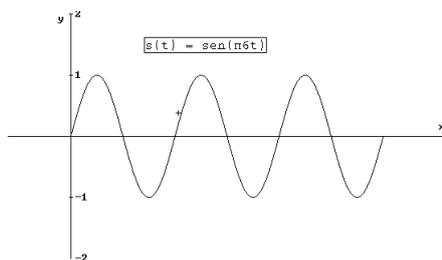


Figura 3

En general, tanto la amplitud de una señal como su frecuencia pueden variar con el tiempo. En 1812 Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) publicó un tratado titulado *Teoría analítica del calor*, en el que asegura que toda señal periódica de periodo T , es decir que satisface $s(t) = s(t + T)$, puede representarse como una suma infinita de señales estacionarias elementales de la forma:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T}x\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T}x\right) \quad (1)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right) dt, \quad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(\frac{2\pi k}{T}t\right) dt.$$

Si bien la fórmula es correcta en cierto sentido, ha requerido un gran esfuerzo de destacadas figuras de la matemática de los siglos XIX y XX poder distinguir en qué sentido la representación dada en (1) es cierta. Esta representación es correcta en el sentido de la convergencia en el espacio $L^2(0, T)$ de las señales de energía finita. En cuanto a la representación punto a punto o en casi todo punto, la fórmula (1) ha inspirado brillantes desarrollos matemáticos que culminaron con el trabajo de Lennart Carleson sobre la convergencia puntual de la serie (1) para las funciones del espacio de energía finita en la década 1950-60. Por su contribución en este campo y en el de los sistemas dinámicos, Lennart Carleson ha recibido el premio Abel 2006 que concede la Academia Noruega de Ciencias y Letras.

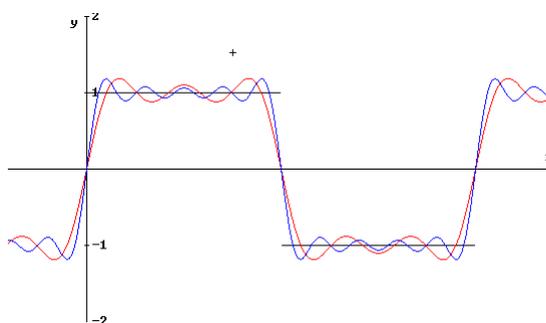


Figura 4. Aproximación mediante series de Fourier

En (1) la función periódica $f(x)$ se representa mediante infinitas señales sinusoidales de frecuencias 0 y $k/T, k=1,2,3, \dots$ con amplitudes a_k y b_k . Considerar una señal desde el punto de vista de sus componentes frecuenciales ha sido un artilugio usado por físicos, ingenieros y matemáticos para manipularlas. Por ejemplo, es posible limpiar el ruido de la grabación de una conversación telefónica,

lo que se usa para detectar nítidamente la voz de un secuestrador pidiendo un rescate desde una cabina telefónica pública. Esta aplicación se basa en eliminar de la señal aquellas componentes frecuenciales de menor presencia y reconstruir la señal sin ellas, como se muestra en la figura 5.

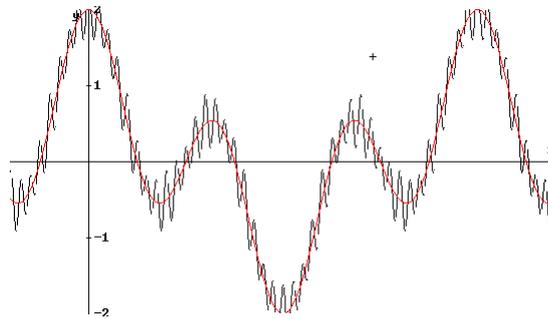


Figura 5. De la señal $s(t) = \cos(2\pi t) + \cos(6\pi t) + 0.1\cos(60\pi t) + 0.3 \cos(80\pi t)$, dibujada con trazo negro, se han eliminado las componentes frecuenciales de valores 30 y 40 para obtener la señal nítida dibujada en rojo.

2. SEÑALES UNIDIMENSIONALES NO PERIÓDICAS. TRANSFORMADA DE FOURIER.

Para señales no periódicas $f(t)$ definidas en la recta real, la herramienta que mide la cantidad que la señal tiene de frecuencia ω es la *transformada de Fourier*:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x \omega} dx, \quad (2)$$

donde $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$, por lo que (2) es una generalización de las fórmulas que definen a_k y b_k en (1). Bajo ciertas condiciones sobre la señal y su transformada de Fourier, aquella puede recuperarse a partir de sus valores de frecuencias usando el teorema de inversión:

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) e^{2\pi i x \omega} dx. \quad (3)$$

Para señales cuya transformada de Fourier tiene soporte compacto se puede reconstruir una señal a partir de sus valores en unos puntos determinados. Este resultado publicado por Claude E. Shannon en 1949 ([Sh]), y que se conoce con el nombre de *Teorema de muestreo de Shannon*, es la base de la comunicación digital. Este teorema establece que si una señal es integrable y los valores de su transformada de Fourier son nulos fuera del intervalo $[-B/2, B/2]$ se cumple la fórmula:

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{k}{B}\right) \frac{\sin \pi(Bx - k)}{\pi(Bx - k)}. \quad (4)$$

El teorema de muestreo de Shannon se aplica a señales cuyo rango de frecuencias está limitado a un intervalo finito, que es siempre el caso en las señales que aparecen en la práctica (por ejemplo, los valores no nulos de frecuencia máxima transmitida por una línea telefónica está alrededor de 4000 ciclos por segundo). Con conocimientos elementales sobre las propiedades de la transformada de Fourier, el Teorema de muestreo de Shannon tiene una demostración sencilla ([HW], páginas 257 y 258). Es, sin embargo, la base de la tecnología digital puesto que permite reconstruir la señal a partir

de sus valores en puntos equidistantes la cantidad $1/B$, esto es, con un total de B valores de la señal por unidad de tiempo.

Otra forma de tratar las señales cuya forma a lo largo del tiempo cambia es dividir la recta del tiempo en varios intervalos y hacer en cada uno de ellos un análisis del tipo de las series de Fourier. El ejemplo más sencillo es dividir la recta real en los intervalos $[n, n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$, con lo que la representación de una función se hace con una doble suma infinita cuyos coeficientes marcan la cantidad de la señal a una frecuencia dada relativa a uno de estos intervalos:

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left(\int_n^{n+1} f(t) e^{-2\pi i m t} dt \right) \chi_{[n, n+1)}(x) e^{2\pi i m x}. \quad (5)$$

Este método se llama *Análisis de Fourier con ventanas*. Sin embargo al tratar de aproximar la señal f por una suma de cantidades finitas usando la fórmula (5) aparecen discontinuidades debidas a los cortes bruscos de la señal hechos con la función indicadora del intervalo $[n, n+1)$. Para superar esta dificultad J. Von Neumann en sus trabajos sobre mecánica cuántica ([Ne]) y D. Gabor en sus trabajos sobre sonido y comunicaciones ([Ga]) propusieron sustituir la función indicadora que aparece en (5) por una función g más suave adaptada a este intervalo y sus trasladadas enteras, de manera que g fuera localizada en cuanto a sus variables de tiempo y de frecuencia. Este deseo lo impide el teorema de Balian-Low (ver [Ba] y [Lo]). Este teorema establece que si se cumple (5) con una función g en lugar de la función indicadora, entonces se ha de tener:

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |t g(t)|^2 dt \right) \left(\int_{\mathbb{R}} |\xi \hat{g}(\xi)|^2 d\xi \right) = \infty.$$

Por tanto, o bien la función g o su transformada de Fourier no puede decaer más rápido que la función $1/x^2$. Una demostración de este resultado puede verse en ([HW], sección 8.2).

3. EL MUNDO DE LAS SEÑALES DISCRETAS. LA TRANSFORMADA RÁPIDA DE FOURIER.

Las señales que se obtienen midiendo cantidades a intervalos igualmente separados en el tiempo (cada minuto, cada hora, cada día,...) producen un valor para cada medición y se llaman señales discretas. Los valores del índice de precios o los datos atmosféricos obtenidos al medir la presión, la temperatura o la humedad son algunos ejemplos.

Desde el punto de vista matemático son también funciones, pero ahora definidas sobre un conjunto discreto $\{0, 1, 2, \dots, N-1\}$, donde N es el número total de datos obtenidos. Representaremos una señal discreta de la forma $f[n], n = 0, 1, 2, \dots, N-1$, para distinguirla de una señal continua.

De manera análoga a como se define la transformada de Fourier de una función continua, la *transformada de Fourier discreta* (TFD) de la señal f es:

$$\hat{f}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-\frac{2\pi i k n}{N}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad (6)$$

lo que produce otra sucesión de N valores que de nuevo indica la cantidad de tiene la señal de la frecuencia k . Con estos valores frecuenciales se puede volver a recuperar los datos originales con la fórmula de inversión:

$$f[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{f}[k] e^{\frac{2\pi i k n}{N}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (7)$$

El cálculo directo de la TFD con la fórmula (6) requiere $2N^2$ operaciones (N^2 multiplicaciones y N^2 sumas). La *transformada de Fourier rápida* (TFR) es un algoritmo que reduce la complejidad del cálculo de la TFD a $4N \log_2 N$ operaciones haciendo una reordenación de los cálculos. Por ejemplo, si $N=1024$, la TFD realiza $2N^2=2.097.152$ operaciones, mientras que la TFR hace $4N \log_2 N=40.960$ (¡unas 50 veces menos!).

La transformada de Fourier rápida es uno de los algoritmos más usados en los cálculos con señales unidimensionales. En señales continuas, donde el cálculo de la transformada de Fourier mediante la integral dada en (2) puede resultar complicado, el valor de la señal se muestrea a intervalos igualmente espaciados y se usa la TFR. Si el número de muestras N es grande la percepción visual de la señal reconstruida con estos valores es similar a la señal original y en muchos casos indistinguible para el ojo humano. Compañeros inseparables de la transformada de Fourier discreta son las bases discretas de senos y cosenos y sus correspondientes transformadas rápidas (ver [Ma], página 345 y siguientes).

4. UNA NUEVA FORMA DE ESTUDIAR LAS SEÑALES. LAS ONDÍCULAS.

Una forma de detectar las capas petrolíferas del interior de la tierra es enviar vibraciones o impulsos y analizar el eco recibido. En la práctica, este análisis debería ayudar a decidir dónde y de qué están compuestas las distintas capas del subsuelo. El análisis de Fourier con ventanas que desde 1960 se usaba para estudiar estos ecos no satisfacía a Jean Morlet, que trabajaba en la compañía de petróleo francesa Elf-Aquitaine. En el análisis como en (5) el tamaño de las ventanas permanece constante y éstas se rellenan con oscilaciones $e^{2\pi i m t}$ de todas las frecuencias enteras. Como alternativa, J. Morlet propuso en 1975 considerar sistemas en los que la anchura de la ventana variara, para poder estudiar la señal a distintos niveles.

Vamos a tratar de explicar esta nueva forma de estudiar las señales en un caso muy sencillo. Consideremos que tenemos una señal $f(t)$ definida en un intervalo de tiempo unidad $I=[0,1)$. Para cada $j = 0, 1, 2, 3, \dots$ Dividimos el intervalo I en 2^j partes iguales cada una de ellas de longitud $1/2^j$, obteniendo los intervalos diádicos:

$$I_{j,k} = \left[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j} \right), \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Las ventanas para realizar el análisis de la señal son ahora las funciones indicadoras de cada uno de estos intervalos, $\varphi_{j,k}$, que valen 1 si en el intervalo $I_{j,k}$ y 0 fuera de él. Observar que $\varphi_{j,k}(x) = \varphi_{0,0}(2^j x - k)$, de manera que todas las funciones se obtienen por dilataciones y traslaciones de la ventana original $\varphi_{0,0}$.

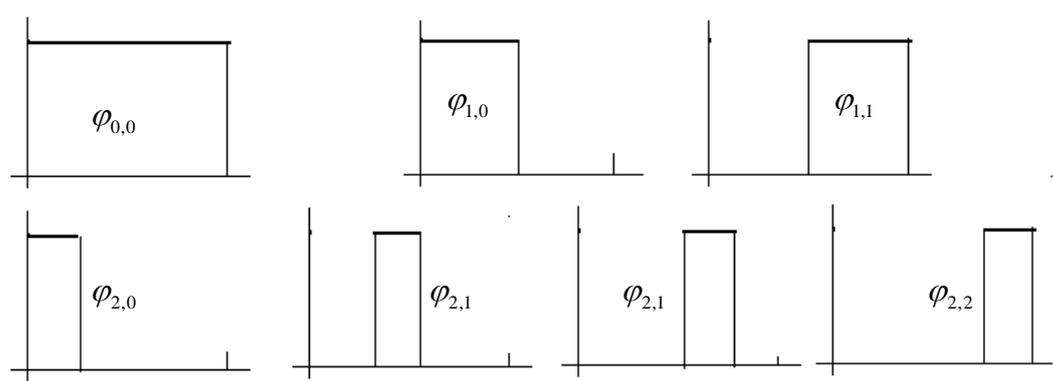


Figura 6. Ventanas de tamaño variable para el análisis de señales

Una aproximación de la señal $f(t)$ al nivel de las ventanas de tamaño $1/2^j$ es:

$$f_j(t) = \sum_{k=0}^{2^j-1} t_{j,k} \varphi_{j,k}, \quad t_{j,k} = 2^j \int_{k/2^j}^{(k+1)/2^j} f(t) dt, \quad (8)$$

de manera que si j es grande $f_j(t)$ y $f(t)$ son indistinguibles para el ojo humano. La señal $f(t) = [\text{sen}(2\pi t)]^2$ ha sido aproximada con ventanas de tamaño $1/2^7 = 1/128$ en la imagen de la parte superior de la figura 7, mientras que la de la parte inferior se ha hecho con ventanas de tamaño $1/2^{10} = 1/1024$ y resulta indistinguible de la señal original.

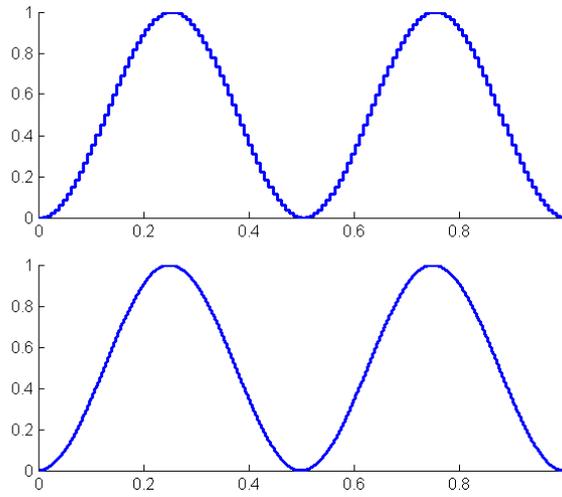


Figura 7.

La aproximación de la señal $f(t)$ al nivel de las ventanas de tamaño $1/2^{j-1}$ es:

$$f_{j-1}(t) = \sum_{k=0}^{2^{j-1}-1} t_{j-1,k} \varphi_{j-1,k}, \quad t_{j-1,k} = 2^{j-1} \int_{k/2^{j-1}}^{(k+1)/2^{j-1}} f(t) dt. \quad (9)$$

Como no podía ser de otra manera, el cálculo:

$$\begin{aligned} t_{j-1,k} &= 2^{j-1} \int_{k/2^{j-1}}^{(k+1)/2^{j-1}} f(t) dt = \frac{2^j}{2} \left(\int_{2k/2^j}^{(2k+1)/2^j} f(t) dt + \int_{(2k+1)/2^j}^{(2k+2)/2^j} f(t) dt \right) \\ &= \frac{1}{2} (t_{j,2k} + t_{j,2k+1}) \end{aligned} \quad (10)$$

muestra que los valores de $t_{j-1,k}$ son la media de los valores de la aproximación de la señal en los dos subintervalos diádicos en los que se subdivide $I_{j-1,k}$. Lo que se ha perdido al pasar de la aproximación f_j a f_{j-1} son los *detalles* de la señal. En la figura 8 se observa que estos detalles tienen distinto signo en

cada uno de los subintervalos en los que se divide $I_{j-1,k}$, y su magnitud coincide con la magnitud de la semidiferencia.

$$d_{j-1,k} = \frac{1}{2}(t_{j,2k} - t_{j,2k+1}). \quad (11)$$

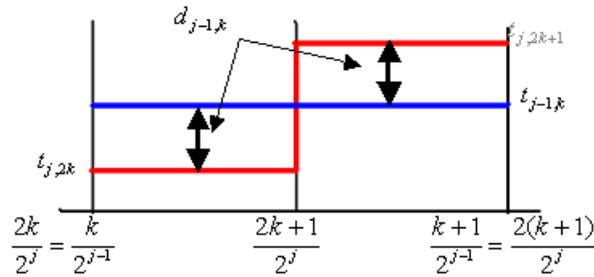


Figura 8. Obtención de los detalles

Considerando las funciones:

$$\psi_{j-1,k} = \chi_{[\frac{2k}{2^j}, \frac{2k+1}{2^j})} - \chi_{[\frac{2k+1}{2^j}, \frac{2k+2}{2^j})}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 2^{j-1} - 1, \quad (12)$$

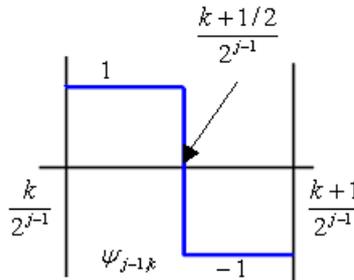


Figura 9. Ondícula

la pérdida de información al pasar de una aproximación a otra se escribe de la forma:

$$f_j(x) - f_{j-1}(x) = \sum_{k=0}^{2^{j-1}-1} d_{j-1,k} \psi_{j-1,k}(x). \quad (13)$$

Este proceso puede repetirse otra vez con los coeficientes $t_{j-1,k}$ de la aproximación de la señal f en el nivel de las ventanas de tamaño $1/2^{(j-1)}$ para obtener los coeficientes $t_{j-2,k}$ de la aproximación de la señal f en el nivel de las ventanas de tamaño $2^{-(j-2)}$ y los detalles $d_{j-2,k}$, que describen la pérdida de información en este paso. El proceso puede repetirse tantas veces como se desee. Si se comienza con una aproximación al nivel de las ventanas con $j=10$ y se realiza este procedimiento 3 veces, tendremos 2^7 coeficientes para determinar la aproximación al nivel de las ventanas $j=7$ y los detalles de cada uno de los niveles sobre los que se han ido haciendo las descomposiciones. Es fácil convencerse de que la cantidad de información almacenada es la misma que la original, pero reordenada para disponer de los detalles en cada uno de los pasos. La figura 10 es una representación esquemática de este procedimiento.

Para representar una imagen en un ordenador se divide el rectángulo que contiene a la imagen en pequeños rectángulos, llamados *píxeles*, y se indica para cada uno de ellos su color. Cualquier color puede obtenerse a partir de los colores fundamentales rojo, verde y azul (sistema RGB) superponiéndolos con distintas luminosidades. La luminosidad de cada uno de estos colores se indica con un número desde 0 (para la luminosidad nula) hasta el 255 y se representan en base 2 en el ordenador.

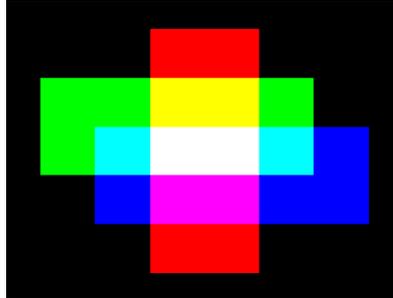


Figura 11. Obtención de colores a partir de los colores fundamentales

De manera más precisa, el largo l de una imagen y su ancho a se dividen en 2^N partes iguales, lo que produce $2^N \times 2^N$ píxeles. Cada uno de estos píxeles en que se ha dividido la imagen se escribe de la forma:

$$I_{N,(k_1,k_2)} = \left[\frac{lk_1}{2^N}, \frac{l(k_1+1)}{2^N} \right) \times \left[\frac{ak_2}{2^N}, \frac{a(k_2+1)}{2^N} \right), \quad 0 \leq k_1, k_2 < 2^N.$$

A cada uno de estos píxeles se le asignan tres números,

$$c_{N,(k_1,k_2)} = (r_{N,(k_1,k_2)}, g_{N,(k_1,k_2)}, b_{N,(k_1,k_2)}),$$

que corresponden a su representación con los colores fundamentales rojo, verde y azul, y cuya superposición produce el color del píxel. La representación matemática de la imagen es

$$f(x, y) = \sum_{0 \leq k_1, k_2 < 2^N} c_{N,(k_1,k_2)} \chi_{I_{N,(k_1,k_2)}}(x, y). \quad (14)$$

Para el caso $N=10$ la imagen se ha representado con $3 \times 2^{10} \times 2^{10}$ números. Ésta es una representación similar a la dada en (9) para señales unidimensionales y con ella se pueden hacer manipulaciones similares a las efectuadas en la sección 4. En particular se pueden obtener su *tendencia* y sus *detalles*. La primera tendencia es una representación de la imagen al nivel de resolución 2^{N-1} donde el color de cada uno de los nuevos píxeles es la media aritmética de los colores de los cuatro píxeles que le componen. Los detalles de esta aproximación son la diferencia entre la señal original y la nueva. El algoritmo puede repetirse cuantas veces se desee para obtener la misma cantidad de datos que se tenía al comienzo, pero reordenados de manera que sencillas manipulaciones puedan producir una gran compresión de la imagen.

Las flores de la parte izquierda de la figura 12 es una imagen de $2^{10} \times 2^{10}$ píxeles; la parte central de la misma figura muestra el resultado de aplicar este procedimiento tres veces a la figura original. La nueva tendencia tiene $2^7 \times 2^7 = 16.384$ píxeles, por lo que al almacenarla en un ordenador ocupa $1/64$ del tamaño original. Aunque se haya conseguido una gran compresión la imagen final es de mala

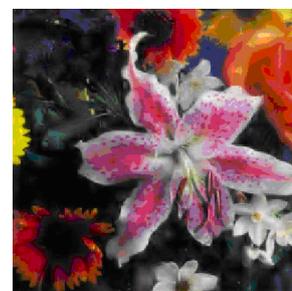
calidad. Las ondículas unidimensionales, usadas a lo largo y a lo ancho de la imagen, permiten resolver el problema de obtener una imagen similar a la original, pero a la vez comprimida. La idea es que muchos de los detalles son superfluos. Eliminando aquellos detalles cuya representación en la escala 0-255 son menores que 20 y aplicando el algoritmo descrito anteriormente con las ondículas que se utilizan en la versión comercial de JPEG2000 (la misma que se usa en las imágenes de extensión JPG) se obtiene la imagen de la derecha de la figura 12. En este caso se consigue que el 85,9641% de los datos sean nulos, reduciéndose de esta manera el tamaño de la imagen.



*Imagen original con
 $2^{10} \times 2^{10}$ píxeles*



*Tendencia con $2^7 \times 2^7$
píxeles*



*Imagen reconstruida eliminando
los detalles pequeños*

Figura 12: Una imagen y sus representaciones comprimidas.

El tratamiento comercial de las imágenes está basado en la aplicación reiterada de algoritmos unidimensionales. Durante los últimos 10 años se han hecho varios intentos de buscar algoritmos típicamente bidimensionales que permitan detectar características bidimensionales de una imagen. Uno de estos intentos es las *curvelets*, presentadas por E. J. Candès y D. L. Donoho en el año 2000, que tratan de solucionar el problema de representar con pocos coeficientes los bordes curvos de una imagen (ver [CD]). Otro son las *contourlets*, presentadas por M. N. Do y M. Vetterli en el año 2003, que permiten obtener buenas aproximaciones de funciones suaves bidimensionales con algoritmos que son eficientes cuando se hacen en un ordenador (ver [DV]).

6. EPÍLOGO

Durante más de 200 años el Análisis de Fourier y sus variantes, como la transformada de Fourier con ventanas y la transformada rápida de Fourier, han sido una poderosa herramienta en muchos campos de la ciencia y de la industria. La llegada de las ondículas, el Análisis Multiresolución y sus variantes han permitido disponer de una nueva herramienta con la que trabajar tanto en campos ya explorados por las técnicas de Fourier como en otros nuevos.

La industria del cine y del entretenimiento no es ajena a estos desarrollos. La necesidad de comprimir sus archivos se pone de manifiesto si se tiene en cuenta que el almacenamiento de una sola imagen requiere 12 Megabytes y que para que el movimiento sea aceptable se requiere pasar 24 imágenes por segundo por delante de los ojos del espectador. Con estos números, se necesitarían 1800 Gigabytes para almacenar una película de 100 minutos, por lo que es necesario usar técnicas de compresión de imágenes. También se utilizan las ondículas para producir efectos especiales, como en el caso de la película Toy Story II.

Todo tipo de imágenes invade nuestras vidas. El encontrar algoritmos eficientes para comprimir tanto imágenes fijas como en movimiento es uno de los grandes retos del siglo XXI.

BIBLIOGRAFÍA

- [Ba] R. Balian, *Un principe d'incertitude fort en théorie du signal ou en mécanique quantique*, C. R. Acad. Sci. Paris, 292, Série II, (1981), 1357-1361.
- [Bu] B. Burke-Hubbard, *The World According to Wavelets*, A.K. Peters, (1996).
- [CD] E. J. Candès, D. L. Donoho, *Curvelets – A Surprisingly Effective Nonadaptive Representation for Objects with Edges*, Saint-Melo Proceedings, Vanderbilt Univ. Press, Nashville, TN, (2000)
- [Da1] I. Daubechies, *Orthonormal bases of compactly supported wavelets*, Comm. Pure Appl. Math., 41, (1988), 909-996.
- [Da2] I. Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets*, CBS-NSF Regional Conferences in Applied Mathematics, 61, SIAM, (1992).
- [DV] M. N. Do, M. Vetterli, *The Contourlet Transform: An Efficient Directional Multiresolution Image Representacion*, IEEE Trans. on Image Processing, Oct. 2003.
- [Ga] D. Gabor, *Theory of communication*, J. IEE London, 93 (3), (1946), 439-457.
- [Ha] A. Haar, *Zur theorie der orthogonalen funktionen systems*, Math. Ann., 69, (1910), 331-371.
- [He] E. Hernández, *Ondículas y tecnología*, Bol. Soc. Mat. Apl., 25, (2003), 37-52.
- [HW] E. Hernández, G. Weiss, *A First Course on Wavelets*, CRC Press, (1996).
- [LM] P. G. Lemarié, Y. Meyer, *Ondelettes et bases hilbertiennes*, Rev. Mat. Iberoamericana, 2, (1986), 1-18.
- [Lo] F. Low, *Complete sets of wave packets*, A passion for Physics – Essais in Honor of Geoffrey Chew, World Scientific, Singapore, (1985), 17-22.
- [Ma1] S. Mallat, *Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases in $L_2(\mathbf{R})$* , Trans. Amer. Math. Soc., 315, (1989), 69-87.
- [Ma2] S. Mallat, *A Wavelet Tour of Signal Processing*, Academic Press, (1997).
- [Ne] J. von Neumann, *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ., 1932, 1949 y 1955.
- [Sh] C. E. Shannon, *Communications in the presence of noise*, Proc. Of the Inst. Of Radio Eng., 37, (1949), 10-21.



Eugenio Hernández obtuvo la Licenciatura en Ciencias Matemáticas por la Universidad Complutense de Madrid en 1977 y se doctoró en Washington University, en St. Louis, Missouri, en 1981. Es miembro del Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Madrid desde 1982, en donde ejerce como Profesor Titular de Análisis Matemático desde 1985. Durante el año académico 1987-88, E. Hernández fue miembro del Mathematical Sciences Research Institute en Berkeley, California, disfrutando de una beca Fulbright. Ha sido profesor visitante en Washington University en St. Louis, Missouri, en 1994-95 y en 2002-02. Sus investigaciones abarcan las áreas de la teoría de interpolación de operadores, desigualdades con peso, y desde comienzo de la década de 1990, de la teoría de ondículas.