E.M. nº 12 Septiembre-Diciembre 2002

Encuentros Multidisciplinares

MODELIZACIÓN ESTOCÁSTICA EN LOS MERCADOS FINANCIEROS: UN PUENTE ENTRE LO SIMPLE Y LO COMPLEJO

Juan Manuel Valderas Jaramillo
José María Alba Riesco
Elena Olmedo Fernández
Profesores del Dpto. de Economía Aplicada I
Universidad de Sevilla

INTRODUCCIÓN.

Un nuestro afán de una mayor comprensión del mundo en que vivimos, el papel jugado por las técnicas matemáticas y estadísticas no es absoluto despreciable. Con el devenir de los tiempos, dichas herramientas han mostrado ser de suma de utilidad para tal propósito.

La modelización de la realidad económica no ha sido ajena a esa incursión de técnicas matemáticas y estadísticas, pudiéndonos remontar a las lejanas fechas de mediados del siglo XVII, en donde los trabajos de Sir William Petty, en especial su *Aritmética Política*, fueron pioneros en introducir de forma estructurada los métodos cuantitativos en general, y la estadística en particular, en el estudio de la economía. Desde entonces esta tendencia, lejos de ser ocasional, ha arraigado en el núcleo de la teoría económica, dando lugar a toda una rama de la economía conocida como *economía matemática.*

Esta matematización, omnipresente en la teoría económica actual, es mucho más patente en el campo de la economía financiera. Aunque la estadística y los mercados financieros, si tenemos en cuenta las manifestaciones de Andrew W. Lo[1], han estado unidos de manera indisoluble desde la publicación en 1565 de *Liber de Ludo Aleae* por Cardano, nosotros preferimos remontarnos a una fecha mucho más reciente como la de 1900.

En dicho año, Louis Bachelier introduce la generalización en tiempo continuo del paseo aleatorio, lo que hoy día se conoce con el nombre de movimiento browniano. Este hecho ha demostrado tener una grandísima influencia en la modelización de las series financieras. No obstante, dicha influencia no se manifiesta sino hasta casi un siglo después debido a cuestiones históricas que se expondrán más adelante. Bachelier en su tesis doctoral en 1900 establece que las variaciones de los precios especulativos se distribuyen de manera gaussiana. Este descubrimiento de Bachelier de aplicar el movimiento browniano a la variación de los precios especulativos, es hecho décadas antes de que se desarrollara una teoría matemática del mismo, e incluso antes de que los físicos descubrieran su importancia en el movimiento de las pequeñas partículas en suspensión.

El movimiento browniano y sus transformaciones y generalizaciones, para lo cual es necesaria la herramienta matemática del cálculo estocástico, es la piedra angular de la modelización estocástica de los mercados financieros hoy día. Nuestro objetivo en este trabajo es exponer las características básicas del movimiento browniano y resaltar el carácter complejo del mismo, ya que a partir de generalizaciones en tiempo continuo de modelos lineales obtenemos como resultado una serie de procesos estocásticos cuyas propiedades son aptas para la modelización del mercado financiero, pero lo destacable de este hecho, es que a partir de modelos lineales en tiempo continuo

[1] Lo, A.W. (2000): *Finance: A selective survey*. JASA, vol. 95, nº 450, p. 629.

obtenemos procesos con un complejidad geométrica, como se demuestra con el hecho de que poseen una dimensión fractal, y dichos procesos son aptos para explicar el funcionamiento de los mercados financieros.

MODELIZACIÓN DE LOS MERCADOS FINANCIEROS: UNA BREVE INTRODUCCIÓN HISTÓRICA.

Como nos recuerda M. Davis[2] en un reciente trabajo divulgativo, hace 102 años, el 29 de marzo del 1900, nace la Matemática Financiera. La precisión de esta fecha se justifica por ser la que corresponde a la exposición de la Tesis Doctoral de Louis Bachelier *Théorie de la speculation*. En cinco años precede a los afamados trabajos de Albert Einstein[3] de 1905, su *annus mirabilis*, cuando en tres trabajos coetáneos explica el movimiento browniano (estableciendo, de manera definitiva, la naturaleza atómica y molecular de la materia), el efecto fotoeléctrico y la naturaleza de la luz (haciendo innecesaria la existencia del éter) y, el que ha alcanzado mayor popularidad y difusión, la teoría especial de la relatividad.

Igual que ha ocurrido en otros campos del conocimiento científico, un trabajo pionero ha adelantado métodos y modelos que han precisado un tiempo de maduración y de consolidación (recuérdese la teoría de fluxiones de Newton o la función delta de Dirac que fueron posteriormente formalizadas, muchos años después, por otros trabajos fundamentales). La tesis de Bachelier puede considerarse como visionaria en su época. En dicha obra se encuentra la génesis del análisis moderno de los mercados financieros. Dicho autor fue el primero en plantear la hipótesis denominada en la literatura como del paseo aleatorio, plantear que las variaciones de los precios financieros son independientes y se distribuyen de manera Gaussiana, lo que es equivalente, en nuestra terminología, a decir que los precios financieros en un instante t están gobernados por un proceso estocástico de incrementos independientes y que se distribuyen de acuerdo a un modelo Gaussiano o normal.

A pesar de la excelente teoría sobre el movimiento browniano desarrollada por Bachelier, (donde se exponen conceptos sobre procesos estocásticos que hoy día se reconocen bajo denominaciones de martingala, ecuación de Chapman-Kolmogorov, o ecuación del calor) las ideas y métodos que contenía su tesis permanecieron en un segundo plano, debido quizás a la enorme influencia que las ideas de Albert Einstein han tenido durante todo el siglo pasado en los campos del conocimiento.

Pero este olvido también cayó sobre los aspectos económicos desarrollados en la tesis de Bachelier. Esto se puede explicar por un cúmulo de razones. Por un lado, la hipótesis de paseo aleatorio entraba en contradicción con las ideas prevalecientes en la época, en parte por la escasa formación matemática y estadística de los economistas de la época que suponían que la variación de los precios financieros era un reflejo de las variaciones de la economía real y, por tanto, debían presentar tendencias y ciclos de mayor y menor frecuencia solapados, por lo que la estimación de estas componentes individualmente posibilitaría la predicción de dichas variaciones. Por otro lado, la inercia del mundo financiero, encerrado en las prácticas de las llamadas matemáticas mercantiles, y ajeno, por tanto, al desarrollo de nuevos y complejos métodos que además, y por las circunstancias de la época, no eran fáciles de llevar a la práctica cotidiana de los mercados financieros. El resultado de todas estas prácticas queda reflejado en que, como Cowles muestra en sus artículos publicados[4] en Econometrica en 1933 y 1944, los resultados globales conseguidos por

---

[2] Davis, M. (2001): *Mathematics of Finantial Markets* en Mathematics Unlimited 2001 and Beyond (Engquist, B. y Schmid, W. Ed.), Springer-Verlag.

[3] Strathern, P. (1999): *Einstein y la Relatividad*. Siglo XXI de España.

[4] Cowles, A. (1933): *Can Stock Market forecasters forecast?* Econometrica, vol. 1, p. 309-324 y Cowles, A. (1944) *Stock Market Forecasting.* Econometrica, vol. 11 p. 206-214.

los más reputados profesionales dedicados al análisis de los mercados financieros no son mejores que los que se hubiesen obtenido por una inversión al azar.

También, desde una perspectiva histórica, la primera mitad del siglo anterior está dominada por las fuertes convulsiones sociales que desembocan en dos guerras mundiales y por una crisis económica cuyas consecuencias perdurarán en la memoria colectiva durante muchos años. Posteriormente, los acuerdos de Bretton Woods intentarán, hasta su colapso en 1973, mantener un corsé para la estabilidad de la economía mundial, quedando muy poco margen para el desarrollo de los mercados financieros. Esta conjunción de factores puede explicar el desfase temporal existente entre el trabajo pionero de Bachelier y la situación actual de un gran dinamismo en las matemáticas de los mercados financieros. No es hasta mediada la década de los sesenta, con la introducción por Paul Samuelson[5] del movimiento browniano geométrico, cuando comienza el periodo heroico de la Matemática Financiera. Hasta ese momento no se produce el reconocimiento, en su integridad, del trabajo pionero de Bachelier.

El estudio de unos mercados financieros, cada vez más desarrollados y con productos cada vez más complejos, exige el desarrollo de una metodología para la determinación de los precios de los activos correspondientes y para el análisis de los mercados. El modelo de Bachelier, como las primeras incursiones en un territorio inhóspito, dista mucho de ser definitivo. El trabajo de Bachelier contenía ideas cuya maduración y consolidación teórica tuvo que esperar a los trabajos fundamentales de matemáticos como Norbert Wiener, Paul Levý, Andrey Nikolaevich Kolmogorov, Joseph Leo Doob, Kiyosi Itô y Paul-André Meyer, en un periodo que va desde los años veinte hasta los años sesenta del pasado siglo, trabajos de una elevada dificultad matemática lo que también ha contribuido a su difusión retardada entre los economistas.

Esta difusión podemos considerar que tiene su origen a partir de la década de los 50, sobre todo a raíz de la publicación de unas conferencias impartidas en 1953 por M. Kendall en la Royal Statistical Society con nombre *The Analysis of Economic Time-Series*, en donde dicho autor al analizar las series financieras concluye que los datos financieros parecían elaborados como si *"el demonio del azar eligiera un número aleatoriamente... y lo añadiera al precio actual para determinar el siguiente... precio"*[6]. El interés por un mayor estudio de la dinámica de las series financieras y por la elaboración de diversos modelos probabilísticos para la explicación de las variaciones de los mismos ha crecido significantemente desde la publicación del artículo de Kendall. Un hito en esta corriente son los trabajos realizados por Black, Scholes y Merton, entre otros.

Black y Scholes, con la ayuda de Merton, haciendo uso de esta nueva metodología y con las nuevas técnicas de análisis del cálculo estocástico, obtuvieron a principios de los años 70 una fórmula para la determinación de los precios de las opciones. Mediante un procedimiento se construye una hipotética cartera de valores en la que los riesgos de los activos que forman dicha cartera, acciones y opciones en este caso, se neutralizan. El rendimiento de dicha cartera exenta de riesgo se puede igualar a la de un activo libre de riesgo como puede ser una letra del tesoro. A partir de dicho procedimiento se deriva dicha fórmula, fundamental hoy día para la valoración de algunos tipos de opciones.

La filosofía contenida en estos trabajos y los conceptos matemáticos usados por estos autores, y en toda la literatura moderna posterior sobre matemáticas financieras, tienen su origen en el trabajo de Bachelier en el ocaso del siglo XIX y su posterior desarrollo, como hemos mencionado, a lo largo del siglo XX. En palabras de Stix[7] *"Las matemáticas implícitas en la ecuación de Black-*

[5] Samuelson, P. (1965): *Proof that properly anticipated prices fluctuate randomly*. Industrial Management Review 6, pág. 41-50.
[6] En Shiryaev, A.N. (1999): *Essentials of Stochastic Finance: Facts, theory, models.* pág. 38.
[7] Stix, G. (1998): *Un cálculo del riesgo*, pág. 27.

Scholes consisten en cálculos estocásticos descendientes de la obra de Bachelier y Einstein. Estas ecuaciones no constituían en absoluto el proceder habitual de los programas de administración de empresas. Físicos, informáticos y economistas desempeñan ahora un importante papel en los colosos financieros de Wall Street"

Superado este obstáculo, el gran avance en la matematización de la teoría económica, ha posibilitado que, hoy día, el estudio de los mercados financieros se haya consolidado con el instrumental derivado del cálculo estocástico, como muestra la gran cantidad de bibliografía reciente que existe sobre este tema, así como el reconocimiento mundial y social del mismo por la prestigiosa Fundación Nobel.

En este escenario de actualidad se enmarca este trabajo, se realiza una breve descripción de los aspectos teóricos fundamentales de los instrumento que requiere este tipo de modelización, el movimiento browniano, el cálculo estocástico y las ecuaciones diferenciales estocásticas necesarios para la comprensión de los modelos que describen el comportamiento de los mercados financieros, resaltando los aspectos de la teoría de la complejidad que de él se derivan, observando tanto sus propiedades básicas como la relacionadas con la teoría de la complejidad.

EL MOVIMIENTO BROWNIANO.

En 1827 R. Brown observó que el movimiento de una partícula coloidal sumergida en el agua, consecuencia de la difusión termal de las moléculas de agua que se mueven incesantemente y bombardean la partícula, sea en un zig-zag aleatorio. El que las grandes partículas sumergidas en agua no se movieran, fue explicado en 1904 por H. Poincaré como consecuencia de la ley de los grandes números, ya que las moléculas del medio que le rodean actúan contra ella golpeándola en todas direcciones anulándose las unas con las otras.

La explicación de este movimiento fue dada por Einstein en 1905, y constituyó la prueba irrefutable de la teoría molecular además de establecer el carácter *gaussiano* de las variables implicadas, y Smoluchowski en 1916 de manera independiente. Sin embargo una formulación matemática rigurosa del mismo no fue dada hasta una década más tarde por N. Wiener.

En consecuencia este proceso estocástico es conocido por el nombre de *proceso de Wiener* o *Movimiento Browniano* en la literatura moderna.

Bachelier en 1900 introdujo dicho movimiento, al que denotaremos como $B\ (t)$, como la contrapartida en tiempo continuo del paseo aleatorio. Para justificar este hecho es necesario notar que aunque las trayectorias muestrales del movimiento browniano son continuas, no son diferenciables en ningún punto; no obstante, bajo un marco conceptual distinto[8] se puede demostrar que se puede construir la derivada de un movimiento browniano como un proceso estocástico generalizado, dicho proceso sería un proceso gaussiano con esperanza nula y varianza infinita e independiente con respecto a si mismo en diferentes instantes del tiempo, lo que se conoce con el nombre de "ruido blanco". Un paseo aleatorio es un proceso estocástico del tipo de un ruido blanco pero con varianza constante y finita, que es el proceso habitual para representar las perturbaciones aleatorias utilizadas en la modelización en tiempo discreto.

Las propiedades de los movimientos brownianos son bastante sutiles. La no diferenciabilidad en ningún punto a pesar de ser continua muestra el carácter sumamente irregular que presenta una trayectoria típicamente browniana. No obstante, estas propiedades básicas del movimiento browniano, no son suficientes para definirlos de manera precisa, es necesario añadir la independencia de sus incrementos, es decir, la variación de un movimiento browniano es

8 Véase Arnold, L. (1974): *Stochastic Differential Equations: Theory and applications*, p. 50-56.

independiente de las variaciones del movimiento en instantes pasados, además dichos incrementos se distribuyen de manera Gaussiana. Otras propiedades interesantes del movimiento browniano, que más tarde se tornarán relevantes, son la ausencia de agrupamientos en el tiempo de los periodos de grandes variaciones en el movimiento browniano, y la ausencia de comportamiento cíclico aparente, aunque una trayectoria infinita de un movimiento browniano pasará infinitas veces por todos los valores del eje de ordenadas.

Más relevantes son para nuestros propósitos las propiedades de invarianza del mismo. La invarianza es un concepto mucho mejor definido en términos determinísticos. Trabajando con un proceso estocástico la invarianza debemos buscarla en las propiedades de su distribución probabilística. Así un movimiento browniano es *estacionario* estadísticamente, es decir la distribución no se ve afectado por traslaciones temporales. La distribución del movimiento browniano en intervalos de igual longitud es idéntica, la distribución sólo depende del lapso de tiempo. La distribución del movimiento browniano también es invariante, salvo constantes de proporcionalidad, ante cambios de escala en el tiempo, es decir si en lapso entre dos instantes de tiempo existe una razón de proporcionalidad, la distribución del intervalo mayor se puede obtener como la distribución del intervalo menor multiplicándola por la razón de proporcionalidad. Son estas propiedades de invarianza la que le proporcionan el carácter fractal al movimiento browniano. De hecho, puede considerarse que una trayectoria browniana en un intervalo es la réplica, en términos probabilísticos, de la trayectoria en un intervalo más pequeño. Es lo que Mandelbrot[9] reconoce como un proceso auto-afín.

No es complicado demostrar que las trayectorias de un movimiento browniano en cualquier intervalo finito son no rectificables y de variación no acotada, por tanto la longitud de cualquier arco finito de un movimiento browniano es infinita. De hecho, el movimiento browniano unidimensional tiene dimensión[10] de recuento de cajas, así como de Haussdorf-Besicovitch, igual a 1’5. Por tanto las trayectorias muestrales que describe un movimiento browniano son fractales. Esta característica del movimiento browniano y de sus modificaciones, diferentes modificaciones o versiones del movimiento browniano o procesos definidos a partir de dicho movimiento poseen también esta dimensión fractal[11]. Este hecho, que en principio no pasaría de ser anecdótico toma toda su relevancia si tenemos en cuenta que el movimiento browniano es el proceso clave para el desarrollo del cálculo estocástico y en consecuencia de la modelización estocástica en tiempo continuo de los mercados financieros.

EL CÁLCULO ESTOCÁSTICO.

El cálculo estocástico se basa en el concepto de *integral estocástica*, es decir, la construcción de una integral en la que el término con respecto al que integramos es un proceso estocástico. En lo que se refiere a nuestros propósitos el papel de integrador es jugado por un movimiento browniano estándar[12]. Dicho concepto se desarrolla dado que la resolución de determinados problemas, en los que aparecen implicados ciertos procesos estocásticos como el movimiento browniano, su resolución pasa por resolver integrales de este tipo.

---

[9] Mandelbrot, B. (1997): *A multifractal model of asset returns*, p. 7

[10] Mandelbrot, B. (2001): *Gaussian Self-Affinity and Fractals*, p. 124

[11] Op. Cit. Capítulo 3.

[12] El hecho de que sea habitualmente el movimiento browniano el integrador en las integrales estocásticas reside en aspectos muy técnicos. En particular se debe a las propiedades del mismo, particularmente al hecho de que sea una martingala de cuadrado integrable. El cálculo estocástico se ha venido desarrollando continuamente a lo largo de este siglo, sustituyendo el movimiento browniano por otros procesos estocásticos más generales. No obstante, no conocemos aplicaciones financieras de dicho tipo de integrales más generales.

El campo financiero es un campo en que estos modelos tienen muchísimas y muy variadas aplicaciones. En la modelización de las magnitudes financieras[13], se suelen establecer como hipótesis que las magnitudes se comportan como determinados procesos estocásticos y, para la obtención de las distribuciones de magnitudes relacionadas con este proceso, es necesario plantear y resolver integrales estocásticas. Es necesario por tanto definir en cierto sentido integrales del tipo

$$\int_0^t f(s,\omega)\, dB_s(\omega)$$

de manera que dicha integral exista y sea coherente. El hecho de que el movimiento browniano es de variación no acotada, nos lleva a que no podamos interpretar dicha integral en el sentido usual de una integral de Riemann-Stieltjes.

Históricamente, el concepto de integral para el caso en que el integrador es un movimiento browniano cuando el integrando es un conjunto de funciones aleatorias con determinadas propiedades, fue desarrollado por K. Itô en 1944 en un artículo titulado *Stochastic Integral* publicado en los *Proceedings* de la Academia Imperial de Tokio, aunque como Shiryaev[14] constata y el propio Itô reconoce[15], el primero en definir la integral estocástica fue N. Wiener en 1934 para integrandos no aleatorios suaves y de cuadrado integrable. La manera de definir la integral estocástica, en palabras de Mandelbrot[16] *"...si [el integrador] estuviera reducido a un número de saltos, tal integral sería simplemente una suma de variables aleatorias. De otra manera, [la integral estocástica] se construye con la ayuda de sumas aleatorias auxiliares de la misma manera que una integral ordinaria se construye con la ayuda de sumas auxiliares"*. Por tanto una integral estocástica se define como el límite, en cierto sentido, de una suma de variables aleatorias. La integral estocástica una vez definida, es una integral que básicamente conserva las propiedades de una integral ordinaria. De hecho es un operador lineal, es decir la integral estocástica de una combinación lineal de funciones es la combinación lineal de las integrales de estocástica de las funciones. Queremos, por último, resaltar en este tema tan árido que los resultados de una integral estocástica son procesos estocásticos.

Íntimamente relacionado con este concepto está el concepto de ecuación diferencial estocástica[17]. Básicamente una ecuación diferencial estocástica es una generalización del concepto de ecuación diferencial ordinaria, es un modelo en el que la variación en tiempo continuo, o diferencial, del proceso solución o variable dependiente de la ecuación diferencial estocástica, se descompone en la parte de variación debida a la variación del tiempo, lo que correspondería a una ecuación diferencial ordinaria, y por otro lado a la parte debida a la variación en tiempo continuo de un movimiento browniano, lo que le confiere el calificativo de estocástico a la ecuación diferencial.

Esto se expresa compactamente como

$$dX_t = \alpha(t, X_t)\, dt + \delta(t, X_t)\, dB_t$$

La solución a dicha ecuación diferencial es un proceso estocástico, X_t, para lo cual se deben hacer uso de todas las herramientas de cálculo estocástico desarrolladas a lo largo del siglo XX.

[13] Actualmente existe una vastísima literatura sobre el tema, a modo de ejemplo se pueden consultar los libros de Shiriayev, A.N. (1999): *Essentials of Stochastic Finance: Facts, Models, Theory.* World Scientific, Merton, R.C. (1992): *Continuous-Time Finance*. Blackwell, o Bisière, C. (1997): *La structure par terme des taux d'interêt.* Presses Universitaire de France.

[14] Shiryaev, A.N. (1999): *Essentials of Stochastic Finance: Facts, Models, Theory,* p. 251.

[15] Itô, K. (1951): *On Stochastic Differential Equations,* p. 2.

[16] Mandelbrot, B.B. (1997): *Fractals and Scaling in Finance: Discontinuity, Concentration, Risk,* p. 317.

[17] Para un estudio más detallado de este tema existen abundantes libros en la literatura. Es un tema muy técnico y formalizado desde el punto de vista matemático. Para un lector que sólo quiera introducirse a un nivel introductorio tanto Durret, R. (1996): *Stochastic Calculus: A practical introduction* como Shiryaev, A.N. (1999): *Essentials of Stochastic Finance: Facts, models, theory* son monografías dedicadas al tema.

Este tipo de modelos planteado como ecuación diferencial estocástica, no son más que la generalización en tiempo continuo de un modelo lineal típico en el que tiempo es la variable explicativa más una perturbación aleatoria gaussiana; el papel que es jugado en tiempo discreto por el paseo aleatorio, en tiempo continuo es jugado por la diferencial del movimiento browniano.

Esto, sumamente resumido, es el tipo básico de modelos con los que se ha venido modelizando en los últimos 20 ó 30 años el mercado financiero. Pues bien, este es el camino por el cual la complejidad inherente al movimiento browniano, se traslada a los procesos que modelizan el mercado financiero. Los procesos resultados de las ecuaciones diferenciales estocásticas de este tipo, suelen expresarse como una transformación funcional del movimiento browniano y por tanto las características del mismo, sobre todo su carácter fractal, se transmiten en mayor o menor medida a los procesos resultantes.

Podemos citar, a modo enumerativo como ejemplos, el proceso conocido como puente browniano, que se obtiene rápidamente mediante la resolución de una ecuación diferencial estocástica[18] y que se puede expresar como una transformación lineal del movimiento browniano unidimensional; dicho proceso es utilizado por Ball y Torous[19] para la obtención de una fórmula de valoración de opciones europeas sobre un tipo especial de bonos que no devengan intereses durante la vida de los mismos. El proceso de Ornstein-Uhlenbeck, estudiado por dichos autores en 1930[20], y es, quizás, el ejemplo más antiguo en la literatura de las ecuaciones diferenciales estocásticas. Dicho proceso, que es la suma de un movimiento browniano estándar más la integral estocástica de una función exponencial, es utilizado por Vasicek[21] como una caracterización de la estructura temporal de los tipos de interés instantáneos para la obtención de la estructura temporal de los precios de los bonos cupón cero en equilibrio. Por último, también el movimiento browniano geométrico, la exponencial de un movimiento browniano modificado, que es básico en la obtención de la fórmula de valoración de opciones europeas de compra obtenida por Black y Scholes[22].

LIMITACIONES DEL MOVIMIENTO BROWNIANO. ALTERNATIVAS Y NUEVAS CORRIENTES EN LA MODELIZACIÓN DE LOS MERCADOS FINANCIEROS.

Desgraciadamente y a pesar de la fácil manejabilidad que ha demostrado tener el movimiento browniano, lo que ha propiciado el desarrollo de todos estos instrumentos y teorías que son de suma utilidad y aplicados hoy día por doquier en los mercados financieros, dicho proceso estocástico representa una vaga descripción de las características de la realidad financiera. Básicamente se pueden señalar cinco características de los datos financieros que no están de acuerdo con las características del movimiento browniano:

- No-estacionariedad aparente de los datos financieros. Las variaciones de los precios de los productos financieros parecen tener una distribución no estacionaria, es decir, se ven periodos de mucha variación seguido de periodos muchos más tranquilos. El movimiento browniano no presenta esta propiedad, ya que la variación de los precios en intervalos de duración constante está equidistribuida.

---

[18] Véase Shiryaev, A.N. (1999): *Essentials of Stochastic Finance: Facts, models, theory*, p. 238.
[19] Véase Sandmann, K. & Sondermann, D. (1993): *A term structure model and the pricing of interest rate derivative.* The Review of Future Markets, vol. 12/2 p. 391.
[20] Véase Todorovic, P. (1992): *An introduction to stochastic processes and their applications*, p. 81.
[21] Vasicek, O. (1977): An Equilibrium Characterization of the term structure. Journal of Financial Economics, 5, p. 177-188.
[22] Shiryaev, A.N (1999): *Essentials of Stochastic Finance: Facts, models, theory*, p. 739-742.

- Concentración de la variabilidad. La variabilidad no sólo no es constante, sino que además se concentran los periodos de alta variabilidad, es decir los periodos en los que la variación de los precios es elevada no se encuentran aislados, sino concentrados temporalmente.

- Dependencia a largo plazo. La anterior característica de los precios financieros está muy relacionada con esta otra de que parece que las variaciones de los precios financieros presentan cierta dependencia que no desaparece sino muy lentamente. Sin embargo el movimiento browniano tiene incrementos independientes y por tanto la variación de un periodo no está relacionada con la variación del periodo anterior.

- Colas pesadas. Las distribuciones de la variación de los precios financieros suelen ser leptocúrticas, es decir, se aprecia empíricamente que variaciones grandes de los precios aparecen con más frecuencia de lo que *normalmente* sería de esperar. Por tanto esto conduce a que es necesario utilizar modelos con mayor variabilidad de los precios que la que proporciona la distribución gaussiana que define el movimiento browniano.

- Discontinuidad en los comportamientos. Las trayectorias del movimiento browniano son continuas, esto no permite introducir discontinuidades de salto en los modelos en que aparece el movimiento browniano. Sin embargo, esta discontinuidad en el comportamiento es algo que es justificable en la realidad, la sensibilidad de los mercados financieros a todo tipo de información, los hace sumamente volátiles y por ejemplo cualquier variación en la política económica, información acerca de la evolución de las magnitudes macroeconómicas o nuevos datos acerca de la evolución de cualquier empresa hace que se produzca un cambio brusco en la situación del mercado que realmente se puede interpretar como una discontinuidad de cambio.

Estas características de los datos financieros han hecho que hayan surgido nuevas corrientes para la modelización de los mercados financieros.

Una tendencia muy importante en este aspecto es la de modelización de los precios financieros vía los modelos ARCH/GARCH, introducidos por Engle en 1982 y Bollerslev en 1986, y sus posteriores extensiones. Básicamente son modelos *no lineales* gaussianos que surgen para dar cabida al fenómeno de las colas pesadas y de la concentración de la variabilidad, esto lo hacen admitiendo cambios en la variabilidad en las perturbaciones, ya que estas varían (heterocedasticidad) en el tiempo. Nelson en 1991 introduce una variación de estos modelos una característica de los datos financieros conocida como efecto "apalancamiento", que se traduce que aunque los datos financieros son muy volátiles ante cualquier tipo de información nueva que aparece en el mercado, sin embargo, sorpresas negativas afectan mucho más a la variabilidad que sorpresas positivas. Esta asimetría en la respuesta a la información se recoge en el modelo de Nelson.

En definitiva, estos modelos se han ido actualizando para adecuarse cada vez de mejor manera a las características de las series financieras así tenemos toda una familia de modelos denominados ARCH, GARCH, EGARCH, FGARCH, FIGARCH, FIEGARCH, FIFGARCH. En Mandelbrot[23], y más recientemente en Ruiz y Pérez[24], se puede encontrar una buena lista de referencias para estos modelos. Básicamente todos estos modelos son no lineales por lo tanto no hace sino ahondar en la penetración en la utilización de los modelos complejos en los mercados financieros. El estudio de esto modelos a la luz de su relación con la teoría de la complejidad es una senda futura de investigación que puede ser interesante y productiva.

[23] Mandelbrot, B. (1997): *A multifractal model of asset returns.*
[24] Ruiz, E. & Pérez, A. (2001): *Assymetric long memory GARCH: A reply to Hwang's model.*

No obstante este tipo de modelos no están exentos de problemas. De acuerdo con las palabras de Mandelbrot[25] la familia de modelos GARCH quiebra en la *consistencia* de los resultados ofrecidos por lo mismo conforme cambiamos la *escala temporal* en que los medimos, esto añade una restricción más al investigador que debe decidir cual es la escala temporal adecuada para el modelo en cuestión. Además estos modelos no representan bien el proceso de *dependencia a largo plazo* de los mismos, algo que Mandelbrot denomina como memoria a largo plazo. Para ello Mandelbrot introduce un modelo que el denomina *multifractal* basado en el movimiento browniano fraccional y los procesos estocásticos multifractales. El movimiento browniano fraccionario es proceso gaussiano obtenido mediante una transformación a través de una integral estocástica del movimiento browniano unidimensional. Fue considerado[26] por primera vez por Kolmogorov en 1940 y por Mandelbrot en 1965 y analizado en profundidad por Mandelbrot y Van Ness en 1968[27].

Las principales características de este movimiento es que posee una variabilidad cíclica no periódica en todas las escalas temporales y presenta dependencia estadística a largo plazo de manera que los incrementos del mismo en dos intervalos temporales no solapados están siempre correlacionados, salvo en el caso que el movimiento browniano fraccional se convierta en un movimiento browniano estándar (que puede interpretarse como un caso particular del anterior). Es un proceso que presenta múltiples coexistentes dimensiones fractales[28]. Los procesos multifractales son una generalización de los procesos auto-afines, lo que confiere al modelo una mayor variabilidad de comportamientos. Este nuevo modelo en palabras de Mandelbrot[29] incorpora las regularidades observadas en las series financieras que no recogían los modelos GARCH.

Esta prometedora nueva tendencia introducida por Mandelbrot profundiza, en la ya de por sí extensa pléyade, de métodos complejos para el estudio de la evolución de los mercados financieros que surgió en 1900 con la introducción del movimiento browniano en la explicación de la variación de los precios especulativos.

BIBLIOGRAFÍA

Arnold, L. (1974): *Stochastic Differential Equations: Theory and applications*. John Wiley & Sons.

Bisière, C. (1997): *La structure par terme des taux d'interêt*. Presses Universitaire de France.

Cowles, A. (1933): *Can Stock Market forecasters forecast?*. Econometrica, vol. 1, p. 309-324.

Cowles, A. (1944): *Stock Market Forecasting*. Econometrica, vol. 11 p. 206-214.

Davis, M. (2001): *Mathematics of Finantial Markets* en Mathematics Unlimited 2001 and Beyond (Engquist, B. y Schmid, W. Ed.). Springer-Verlag.

Durret, R. (1996): *Stochastic Calculus: A practical introduction*. CRC Press.

Itô, K. (1951): *On Stochastic Differential Equations*. Memoirs of the American Mathematical Society, 4. American Mathematical Society.

Lo, A.W. (2000): *Finance: A selective survey*. JASA, vol. 95, nº 450, p. 629-635.

Mandelbrot, B (1997): *Fractals and Scaling in Finance: Discontinuity, Concentration, Risk*. Springer.

Mandelbrot, B. & Van Ness, J.W. (1968): *Fractional Brownian Motions, fractional Brownian noises and applications*. SIAM Review 10, nº 4, p. 422-437.

Mandelbrot, B. (1997): *A multifractal model of asset returns*. Cowles Foundation Discussion Paper #1164.

Mandelbrot, B. (2001): *Gaussian Self-Affinity and Fractals: Globality, The Earth, 1/f Noise, and R/S*. Springer.

---

[25] Mandelbrot, B. (1997): *A multifractal model of asset returns,* p. 1-5.

[26] Shiryaev, A.N (1999): *Essentials of Stochastic Finance: Facts, models, theory,* p. 229.

[27] Mandelbrot, B. & Van Ness, J.W. (1968): *Fractional Brownian Motions, fractional Brownian noises and applications.* SIAM Review 10, n. 4, p. 422-437.

[28] Mandelbrot, B.B. (1997): *Fractals and Scaling in Finance: Discontinuity, Concentration, Risk,* p. 161.

[29] Mandelbrot, B. (1997): *A multifractal model of asset returns,* p. 24.

Mandelbrot, B. (1999): *Multifractals and 1/f Noise: Wild Self-Affinity in Physics (1963-1976).* Springer.

Merton, R.C. (1992): *Continuous-Time Finance*. Blackwell.

Ruiz, E. & Pérez, A. (2001): *Assymetric long memory GARCH: A reply to Hwang's model.* Working Paper 01-62 (29) Statistics and Econometric Series. Departamento de Estadística y Econometría. Universidad Carlos III de Madrid.

Sandmann, K. & Sondermann, D. (1993): *A term structure model and the pricing of interest rate derivative*. The Review of Future Markets, vol. 12/2, p. 391-423.

Shiryaev, A.N. (1999): *Essentials of Stochastic Finance: Facts, theory, models*. World Scientific.

Samuelson, P. (1965): *Proof that properly anticipated prices fluctuate randomly*. Industrial Management Review 6, p. 41-50.

Stix, G. (1998): *Un cálculo del riesgo*. Investigación y Ciencia, Julio 1998, p. 24-30.

Strathern, P. (1999): *Einstein y la Relatividad*. Siglo XXI de España.

Todorovic, P. (1992): *An introduction to stochastic processes and their applications*. Springer Verlag.

Vasicek, O. (1977): *An Equilibrium Characterization of the term structure*. Journal of Financial Economics, 5, p. 177-188.